Chapitre 2

Suites, Limites et Continuité

Dans ce chapitre, nous introduisons un concept central d'analyse, le processus de limite. Ce concept est motivé par le fait suivant : on ne peut pas calculer exactement le nombre réel $\sqrt{2}$ en un nombre fini d'étapes. Mais $\sqrt{2}$ peut être approché avec n'importe quelle précision. Approcher un nombre avec une précision arbitraire signifie le représenter comme limite d'une suite. Le concept du processus de limite est basé sur la structure topologique de l'ensemble des nombres réels donnée par les intervalles ouverts (et la distance de deux nombres réels définie à l'aide de la valeur absolue). Les axiomes algébriques et d'ordre permettent de traiter ce concept par le calcul puisqu'en cas d'existence des limites, le processus de limite préserve ces structures, c'est-à-dire qu'il commute avec les opérations algébriques et la relation d'ordre. De plus, nous introduisons une classe de fonctions réelles qui commutent également avec le processus de limite : les fonctions dites continues.

Notions à apprendre. Suite, sous-suite, suite bornée, suite convergente, limite d'une suite, suite de Cauchy, critère de convergence, limite supérieure et limite inférieure d'une suite, point d'accumulation, suite divergente, suite fortement divergente, suite géométrique, le nombre d'Euler, fonction continue, prolongement par continuité, limite d'une fonction, le théorème de Bolzano-Weierstrass et ses applications aux suites et aux fonctions continues, le théorème de la valeur intermédiaire, suite récurrente, le théorème du point fixe de Banach

Compétences à acquérir. Connaître et savoir appliquer les règles de calcul pour les limites, connaître et savoir appliquer les critères de convergence et démontrer la convergence ou la divergence d'une suite donnée ou d'une suite récurrente à l'aide de ces critères, savoir vérifier la continuité d'une fonction, savoir déterminer le prolongement par continuité et de calculer la limite d'une fonction, savoir appliquer le théorème de la valeur intermédiaire et le théorème du point fixe de Banach.

2.1 Suites et sous-suites

2.1.1 Suites

Définition - suite numérique. Une *suite numérique* est une *application* f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, notée $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire une correspondance qui à chaque $n \in \mathbb{N}$ associe un nombre réel $f(n)$. On pose $x_n = f(n)$ et on désigne la suite par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$.

Plus généralement, soit n_0 un entier, alors $(x_n)_{n\geq n_0}$ définit également une suite numérique.

Exemples de suites.

1. Suites données par une expression explicite :
   (a) Soit $x_n = x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante $(x, x, x, x, \ldots)$.
   (b) Soit $x_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$.
   (c) Soit $x_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \ldots)$.
   (d) Soit $a, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si on définit $x_n = aq^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée une suite géométrique : $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a, aq, aq^2, aq^3, \ldots)$.
   (e) Soit $x_n = \frac{(n+2)(n+3)}{n^2+n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (6, 4, \frac{20}{7}, \frac{30}{13}, \ldots)$.
2. Suites récurrentes. Les éléments de la suite sont donnés par une relation de récurrence et des valeurs initiales.
   (a) Récurrences du premier ordre : $x_{n+1} = f(x_n)$ où f est une fonction réelle et $x_0 \in \mathbb{R}$ est une condition initiale donnée. Par exemple, soit $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, \frac{3}{2}, \frac{17}{12}, \frac{577}{408}, \ldots)$. Nous allons démontrer plus loin que cette suite tend vers $\sqrt{2}$. Une suite géométrique peut être définie de façon unique par la récurrence $x_{n+1} = qx_n$ et la condition initiale $x_0 = a$.
   (b) Récurrences du second ordre : x_{n+1} dépend de x_n et de x_{n-1} ce qu'on peut exprimer par la relation $x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1})$ où f est une fonction à valeur réelle et $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ sont des conditions initiales données. Par exemple, la relation $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $x_0 = 0, x_1 = 1$ donne les nombres de Fibonacci.
3. Série numérique. Soit $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On définit la suite des sommes $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ pour tout $n \geq 0$. Par exemple, si $x_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ pour tous $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors $(S_n)_{n\geq 0} = (\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots)$. Les séries numériques seront étudiées au chapitre 3.

2.1.2 Suites bornées

Ensemble des images d'une suite. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle *ensemble des valeurs* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou *l'ensemble des images* de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des valeurs prises par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i.e. l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots\}$. La notion d'une suite bornée correspond à celle d'un ensemble borné si on considère son ensemble de valeurs.

Définition - suite bornée. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *minorée* s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \geq a$. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *majorée* s'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \leq b$. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *bornée*, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à la fois minorée et majorée.

Exemple. La suite géométrique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si $|q| \leq 1$. Si $q > 1$ elle est seulement minorée, si $q < -1$ elle n'est ni majorée ni minorée.

Proposition. Une suite (x_n) est bornée si et seulement s'il existe une constante $c \geq 0$ tel que $|x_n| \leq c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.1.3 Suites monotones

Définition - suites monotones.

1. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *croissante* si $x_n \leq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *strictement croissante* si $x_n < x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *décroissante* si $x_n \geq x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *strictement décroissante* si $x_n > x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Exemple. La suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante. La suite géométrique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si $q > 1$, constante si $q = 1$ et strictement décroissante si $0 < q < 1$.

2.1.4 Sous-suites

Exemple. Soit $x_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut extraire une suite en considérant uniquement les indices pairs $n_k = 2k$ et $k \in \mathbb{N}$. Ceci donne une suite définie par $y_k = x_{n_k} = x_{2k}$. Une telle suite est appelée sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans notre cas, on obtient une sous-suite constante puisque $x_{n_k} = 1$ pour tout indice n_k. Plus généralement, on a la

Définition - sous-suite. Si $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels, on dit que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une *sous-suite*, ou encore *suite extraite*, de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple. Pour $x_n = (-1)^n$ et n_k de la forme $n_k = 2k+1$, on obtient la sous-suite donnée par $x_{n_k} = -1$. Si $n_k = 3k$, on a la sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \ldots)$.

2.2 Suites convergentes et limites

2.2.1 Limite d'une suite

Introduction. Pour certaines suites, les éléments x_n tendent vers un nombre réel bien défini lorsque l'indice croît. Par exemple, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} =$

$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$ tend vers 0. On dit aussi que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* 0. Plus précisément on a la

Définition - suite convergente. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $x \in \mathbb{R}$, si à tout $\epsilon > 0$, on peut associer un entier naturel N_ϵ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$ on a $|x_n - x| < \epsilon$. On écrit alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x.$$

On dit aussi que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *convergente* et admet pour *limite* $x \in \mathbb{R}$. Une suite non convergente est dite *divergente*.

Autres notations. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, on note aussi $x_n \to x$ lorsque $n \to +\infty$.

Interprétation métrique de la convergence. La définition signifie que la distance $d(x_n, x) = |x_n - x|$ entre les éléments x_n de la suite et le point x devient arbitrairement petite pour tous les indices n suffisamment grands. Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \quad \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0. \tag{2.1}$$

La définition du processus de limite à l'aide d'une distance (dite métrique) nous permettra de l'étendre aux suites à valeurs complexes, aux suites de vecteurs et aux suites de fonctions.

Remarque - Unicité de la limite. Lorsque la limite existe, elle est unique, autrement dit, toute suite possède au plus une limite. En effet, s'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $|x_n - y| < \epsilon$ pour tout $n \geq M_\epsilon$, on a pour tout $n \geq \max(N_\epsilon, M_\epsilon)$

$$\begin{aligned} |x-y| &= |x - x_n + x_n - y| \\ &\leq |x - x_n| + |x_n - y| \qquad \text{par l'inégalité triangulaire} \\ &< \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \end{aligned}$$

Donc $x = y$.

Remarque - l'ensemble des images d'une suite convergente. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x si pour tout intervalle ouvert de la forme $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ toutes les valeurs x_n, à partir d'un indice $N = N_\epsilon$, se trouvent dans $]x-\epsilon, x+\epsilon[$. Par conséquent, seulement un nombre fini d'éléments x_n sont à l'extérieur de cet intervalle. Notant que tout ensemble fini est borné, cette remarque implique la proposition suivante :

Proposition 2.2.1. *Toute suite convergente est bornée. Toute sous-suite d'une suite convergente converge vers la même limite.*

Remarque - Pratique habituelle de la définition d'une suite convergente. Nous allons expliquer comment nous utilisons le nombre ϵ. Supposons que nous ayons démontré que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier naturel N_ϵ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$ l'inégalité $|x_n - x| < C\epsilon$ est valable, où C ne dépend ni de ϵ ni de n. Nous affirmons que x est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La seule différence par rapport à la définition est la constante C devant ϵ. Pour se ramener à l'inégalité de la définition, nous posons $\epsilon' = \epsilon/C$. Il existe alors un entier naturel N' tel que pour tout $n \geq N'$ on a $|x_n - x| < C\epsilon'$. Par conséquent, pour tout $n \geq N'$

$$|x_n - x| < C\epsilon' = \epsilon.$$

Dans la litérature, les estimations sont présentées telles qu'on a "$< \epsilon$" à la fin en faisant les réarrangements comme ci-dessus. Dans ce cours nous gardons souvent les constantes devant ϵ.

Remarque - Formulation usuelle du processus de limite. Au lieu de dire qu'il existe un entier naturel N tel qu'une certaine affirmation est vraie pour tout $n \geq N$, nous disons souvent simplement *pour tout entier naturel n suffisamment grand*.

Exemples élémentaires.

1. La suite constante $x_n = x$ où $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ satisfait $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ puisque pour tout $\epsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|x_n - x| = 0 < \epsilon$.
2. Soit $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$. Pour tout $\epsilon > 0$ on a $|\frac{1}{n}| < \epsilon$ si $n > \frac{1}{\epsilon}$. On choisit donc un entier naturel N_ϵ tel que $N_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$, par exemple $N_\epsilon = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$. Par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$, on a $|\frac{1}{n}| < \epsilon$ pour tout $n \geq N_\epsilon$, c'est-à-dire
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$
3. La suite d'éléments $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ est divergente. Pour démontrer cette affirmation, nous supposons que (x_n) converge vers un nombre réel x. Donc pour $\epsilon = 1$ il existe un nombre naturel N tel que $|x_n - x| < 1$ pour tout $n \geq N$. Alors pour tout $n \geq N$, nous avons grâce à l'inégalité triangulaire
$$2 = |x_n - x_{n+1}| = |x_n - x + x - x_{n+1}| \leq |x_n - x| + |x_{n+1} - x| < 1 + 1 = 2$$
c'est-à-dire $2 < 2$. La suite ne peut donc converger vers aucun x.
4. Considérons la suite géométrique définie par $x_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$. Si $q = 1$ la suite est constante et donc convergente (voir 1.). Si $q = -1$ la suite est divergente (voir 3.). Soit $|q| > 1$, alors la suite n'est pas convergente car $|q|^n$ n'est pas majoré, i.e. pour tout $C > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|q|^n > C$. Pour démontrer cette affirmation noter, que par l'inégalité de Bernoulli on a pour tout entier naturel n :
$$|q|^n = (1 + |q| - 1)^n \geq 1 + n(|q| - 1)$$
Soit $C > 0$ arbitraire. Par l'axiome d'Archimède il existe un nombre naturel n tel que $n(|q| - 1) > C$. Par conséquent pour cette valeur de n
$$|q|^n \geq 1 + n(|q| - 1) \geq 1 + C > C.$$
Il reste le cas $|q| < 1$:
Proposition 2.2.2. *Soit $|q| < 1$. Alors la suite géométrique $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et*
$$\lim_{n\to+\infty} q^n = 0.$$

Démonstration. Notons que $\frac{1}{|q|} > 1$. Donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre naturel N tel que $(\frac{1}{|q|})^N > \frac{1}{\epsilon}$, c'est-à-dire $|q|^N < \epsilon$. Ceci implique $|q|^n < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. □

2.2.2 Propriétés des valeurs limites

Nous présentons les règles de calcul pour des valeurs limites.

Théorème 2.1. - *Règles de calcul pour des limites.* *Supposons que*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \qquad et \qquad \lim_{n\to+\infty} y_n = y.$$

Alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y. \tag{2.2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n y_n = xy. \tag{2.3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y} \qquad si \quad y \neq 0. \tag{2.4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} |x_n| = |x| \ (= |\lim_{n\to+\infty} x_n|). \tag{2.5}$$

Démonstration. - Règle (2.2). Pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$

$$|x_n - x| < \epsilon \qquad \text{et} \qquad |y_n - y| < \epsilon$$

De plus, les suites sont bornées (car convergentes). Il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que $|x_n| \leq C_1$ et $|y_n| \leq C_2$. Alors pour tout entier naturel $n \geq N$

$$\begin{aligned} |\alpha x_n + \beta y_n - (\alpha x + \beta y)| &\leq |\alpha||x_n - x| + |\beta||y_n - y| \\ &< |\alpha|\epsilon + |\beta|\epsilon \\ &= (|\alpha| + |\beta|)\epsilon. \end{aligned}$$

D'après la remarque ci-dessus, cette inégalité implique que la suite $(\alpha x_n + \beta y_n)$ converge vers $\alpha x + \beta y$.

- Règle (2.3). Pour tout entier naturel $n \geq N$ on a

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |(x_n - x)y_n + x(y_n - y)| \\ &< C_2\epsilon + C_1\epsilon \\ &= (C_1 + C_2)\epsilon. \end{aligned}$$

- Règle (2.3). Si $y \neq 0$ il existe un entier naturel N_0 tel que $|y_n - y| < \frac{|y|}{2}$ pour tout $n \geq N_0$ (choisir $\epsilon = \frac{|y|}{2} > 0$ dans la définition). Cette inégalité implique que $|y_n| > \frac{|y|}{2}$ si $n \geq N_0$. En particulier, $y_n \neq 0$ si $n \geq N_0$ justifiant également la construction de la suite donnée par $\dfrac{x_n}{y_n}$ pour tout n suffisamment grand. Alors pour tout $n \geq \max(N, N_0)$

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{x}{y}\right| &= \left|\frac{(x_n - x)y + x(y - y_n)}{yy_n}\right| \\ &= \frac{|(x_n - x)y + x(y - y_n)|}{|y||y_n|} \\ &< 2\frac{(|y| + |x|)\epsilon}{|y|^2}. \end{aligned}$$

- Règle (2.5). Le fait que $(|x_n|)$ converge vers $|x|$ est une conséquence de l'inégalité triangulaire :

$$\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x|.$$

$\square$

Exemple. Soit $x_n = \frac{(n+2)(n+3)}{n^2+n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour appliquer le théorème on doit extraire le terme n^2 du numérateur et du dénominateur, c'est-à-dire, on écrit x_n comme suit :

$$x_n = \frac{n^2(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = \frac{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

Notons que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ implique $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} x_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{(\lim_{n\to+\infty} 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n})(\lim_{n\to+\infty} 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n})}{\lim_{n\to+\infty} 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}} \\
&= \frac{(1+0)(1+0)}{1+0+0} = 1
\end{aligned}$$

Proposition 2.2.3. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0. Alors la suite $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Démonstration. Exercice. $\square$

Exemple. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

2.3 Critères de convergence

Proposition 2.3.1. - *Processus de limite et structure d'ordre.* *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

1. *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers x et y.*
2. *Il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$: $x_n \leq y_n$*

Alors $x \leq y$.

Démonstration. Nous raisonnons par l'absurde et supposons que $x > y$. Prenons $\epsilon = \frac{x-y}{2} > 0$. Pour cet ϵ il existe $N \geq N_0$ tel que pour tout $n \geq N$:

$$|x_n - x| < \epsilon, \quad |y_n - y| < \epsilon \quad \text{et} \quad x_n \leq y_n$$

En particulier,

$$x - \epsilon < x_n \leq y_n < y + \epsilon$$

C'est absurde car $x - \epsilon = y + \epsilon = \frac{x+y}{2}$. $\square$

Le théorème des deux gendarmes est une simple conséquence de cette Proposition.

Théorème 2.2. - *Théorème des deux gendarmes* [1]**.** *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites satisfaisant les deux propriétés suivantes :*

1. *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite L*
2. *Il existe un entier naturel N_0 tel que pour tout $n \geq N_0$: $u_n \leq x_n \leq v_n$*

Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

Démonstration. Nous donnons une démonstration directe. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier naturel N_1 tel que

$$|u_n - L| < \epsilon \quad \text{i.e.} \quad -\epsilon < u_n - L < \epsilon$$

et

$$|v_n - L| < \epsilon \quad \text{i.e.} \quad -\epsilon < v_n - L < \epsilon$$

Alors pour tout $n \geq N = \max(N_0, N_1)$

$$-\epsilon < u_n - L < x_n - L < v_n - L < \epsilon$$

et donc $|x_n - L| < \epsilon$. □

Exemple. Soit $a > 0$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{a}{n}}$. Notons que

$$1 \leq \sqrt{1+\frac{a}{n}} \leq 1 + \frac{a}{2n}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{1+\frac{a}{n}} = 1$.

Exemple. Soit $a > 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Notons $x_n = \sqrt[n]{a}$. Si $a > 1$ nous avons $x_n \geq 1$ et par l'inégalité de Bernoulli

$$a = (x_n)^n = (1 + x_n - 1)^n \geq 1 + n(x_n - 1) \quad \text{i.e.} \quad x_n \leq 1 + \frac{a-1}{n}$$

et le théorème des deux gendarmes donne le résultat souhaité. Si $a = 1$ le résultat est trivial et si $a < 1$ nous obtenons le résultat grâce à l'identité $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$.

Exemple. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

L'inégalité de Bernoulli ne donne plus une borne qui converge vers 1. Donc considérons la suite définie par $y_n = \sqrt{x_n}$ où $x_n = \sqrt[n]{n}$. Notons que $y_n \geq 1$. Par l'inégalité de Bernoulli, nous trouvons pour tout $n \geq 1$

$$\sqrt{n} = (y_n)^n = (1 + y_n - 1)^n \geq 1 + n(y_n - 1) \quad \text{i.e.} \quad y_n \leq 1 + \frac{\sqrt{n}-1}{n}$$

1. on l'appelle aussi le théorème d'encadrement

et par le théorème des deux gendarmes, nous obtenons $\lim_{n\to+\infty} y_n = 1$ puisque $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{n} = 0$. Par conséquent

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n^2 = (\lim_{n\to+\infty} y_n)^2 = 1.$$

Théorème 2.3. - *"Critère du quotient".* *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite pour laquelle la limite*

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right|$$

existe. Alors, si $\rho < 1$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 tandis que si $\rho > 1$ elle diverge.

Démonstration. L'hypothèse du théorème permet de comparer la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à une suite géométrique. Sans perte de la généralité nous supposons $x_n \neq 0$ pour tous n. Si $\rho < 1$ on choisit $\epsilon > 0$ tel que $\rho + \epsilon < 1$. Il existe un entier naturel N_ϵ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$:

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - \rho \right| < \epsilon$$

d'où par l'inégalité triangulaire $|x_{n+1}| \leq (\rho + \epsilon)|x_n|$. Par récurrence (voir aussi le chapitre 2.8) on conclut que $|x_{n+1}| \leq (\rho + \epsilon)^{n-N_\epsilon}|x_{N_\epsilon}|$ d'où l'affirmation du théorème. On laisse le cas $\rho > 1$ comme exercice. □

Remarque. Si $\rho = 1$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être convergente (par exemple $x_n = 1$) ou divergente (par exemple $x_n = (-1)^n$).

Exemple. La suite géométrique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}, |q| \neq 1$ satisfait ce critère car $x_{n+1} = qx_n$.

Exemple. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Avec $x_n = \frac{a^n}{n!}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a|}{n+1} = 0 < 1.$$

Théorème 2.4. - *Critères de monotonie.*

1. *Toute suite croissante et majorée converge vers le supremum de son ensemble de valeurs.*
2. *Toute suite décroissante et minorée converge vers l'infimum de son ensemble de valeurs.*
3. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telles que*

$$\lim_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = 0.$$

   Alors
   (a) *pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_0 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \leq y_0$*
   (b) *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.*

Démonstration. Exercice. □

Exemple - le nombre d'Euler. [2] Considérons les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Nous affirmons que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. En effet, en appliquant l'inégalité de Bernoulli nous avons

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(n+2)^{n+1}n^n}{(n+1)^{2n+1}}\\ &= \frac{(n^2+2n)^{n+1}}{(n+1)^{2(n+1)}}\frac{n+1}{n}\\ &= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}\\ &> \left(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}\right)\frac{n+1}{n} = 1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{y_n}{y_{n+1}} &= \frac{(n+1)^{2n+3}}{(n+2)^{n+2}n^{n+1}}\\ &= \frac{(n^2+2n+1)^{n+2}}{(n^2+2n)^{n+2}}\frac{n}{n+1}\\ &= \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}\frac{n}{n+1}\\ &> \left(1+(n+2)\frac{1}{n(n+2)}\right)\frac{n}{n+1} = 1\end{aligned}$$

Ceci implique que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont bornées et

$$x_1 \le x_n \le x_{n+1} \le y_{n+1} \le y_n \le y_1$$

De plus

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 0.$$

Alors les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite et nous posons

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne sont pas très adaptées pour le calcul numérique du nombre e car elles ne convergent que lentement. Nous allons encore montrer que

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Ce développement en série converge beaucoup plus rapidement vers la limite (voir chapitre 3.6).

---

2. D'après le mathématicien et physicien Leonhard Euler(1707 - 1783), ce nombre est parfois aussi appelé la constante de Neper.

Exemple - une suite récurrente pour la racine carrée. Soit $a > 0$. Considérons la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \qquad \text{et} \quad x_0 > 0$$

Proposition 2.3.2. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$.

Démonstration. Première méthode : la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les propriétés suivantes. Pour tout $n \in \mathbb{N}$

1. $x_n > 0$ car $x_0 > 0$ et $x_n > 0$ implique $x_{n+1} > 0$.
2. $x_{n+1}^2 \geq a$ car $x_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\big(x_n - \frac{a}{x_n}\big)^2 \geq 0$.
3. $x_{n+1} \leq x_n$ car $x_n - x_{n+1} = \frac{1}{2x_n}\big(x_n^2 - a\big) \geq 0$.

Par conséquent, pour $n \geq 1$, (x_n) est une suite décroissante et minorée par $\frac{a}{x_1}$ car $x_n \geq \frac{a}{x_n} \geq \frac{a}{x_1}$ grâce aux propriétés 2 et 3. Donc $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ existe et $x > 0$. Par la formule de récurrrence, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \frac{1}{2}(\lim_{n\to+\infty} x_n + \frac{a}{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n})$$

c'est-à-dire

$$x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$$

ou $x^2 = a$ et, de plus, $x > 0$ par la propriété 1. □

Démonstration. Deuxième méthode : si la suite est convergente elle doit converger vers $\sqrt{a}$. On définit $y_n = x_n - \sqrt{a}$ qui vérifie la récurrence

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{y_n}{y_n + \sqrt{a}}\, y_n.$$

$y_0 > -\sqrt{a}$ implique $y_1 > 0$ et donc par récurrence $y_n > 0$ pour tout entier $n \geq 1$, d'où

$$y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n$$

pour tout entier $n \geq 1$. Cette inégalité implique par récurrence que $y_n \leq 2^{1-n} y_1$. Par le théorème des deux gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$. □

On présente d'autres suites récurrentes au chapitre 2.8 dans le contexte des méthodes de résolutions exactes pour certaines suites récurrentes ainsi que des méthodes pour étudier leur convergence.

Vitesse de convergence. Après chaque étape de la récurrence, nous pouvons estimer l'erreur de l'approximation de $\sqrt{a}$ grâce aux inégalités

$$\frac{a}{x_n} \leq \sqrt{a} \leq x_n.$$

Nous considérons les erreurs définies par $x_n = \sqrt{a}(1 + u_n)$ et $\frac{a}{x_n} = \sqrt{a}(1 - v_n)$. Donc $u_n \geq 0$ pour $n \geq 1$ et $v_n = \frac{u_n}{1+u_n} \leq u_n$. Les u_n satisfont la récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{u_n^2}{1 + u_n}$$

et nous pouvons estimer u_n par $u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\min(u_n, u_n^2)$. Par exemple, si pour un n, l'erreur est plus petite qu'un pour cent, c'est-à-dire $u_n \leq 10^{-2}$, alors $u_{n+1} \leq 5 \cdot 10^{-5}$ et $u_{n+2} \leq 1.25 \cdot 10^{-9}$. En fait, si $0 < u_0 \leq 1$, alors $0 < u_n \leq 2^{1-2^n} u_0^{2^n}$ (exercice).

2.4 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Introduction. Nous avons vu que toute suite convergente est bornée. Une suite bornée n'est pas toujours convergente. Nous allons montrer que de toute suite bornée nous pouvons extraire une sous-suite convergente.

Théorème 2.5. ***- théorème de Bolzano-Weierstrass***[3] *De toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une sous-suite convergente $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.*

Interprétation du théorème de Bolzano-Weierstrass. Le théorème de Bolzano-Weierstrass signifie que pour toute suite bornée il y a toujours (au moins) un nombre réel x dont chacun des voisinages contient un nombre infini d'éléments de cette suite. Autrement dit, les éléments d'une suite bornée (ou d'une infinité de nombres dans un intervalle borné) s'accumulent ou se concentrent autour (au moins) d'un nombre réel.

Pour démontrer ce résultat, nous construisons une suite convergente à partir de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Sa limite est appelée la limite supérieure de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Limite supérieure et limite inférieure. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On définit la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$y_n = \sup\{x_k : k \geq n\}.$$

La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée, donc convergente. Sa limite est appelée la *limite supérieure* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on la note par $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n$:

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n := \lim_{n\to+\infty} \sup\{x_k : k \geq n\}. \tag{2.6}$$

La suite définie par

$$z_n = \inf\{x_k : k \geq n\}$$

est croisssante et majorée et nous notons sa limite, appelée *limite inférieure* de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n$:

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n := \lim_{n\to+\infty} \inf\{x_k : k \geq n\}. \tag{2.7}$$

Par définition, on a toujours

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n \leq \limsup_{n\to+\infty} x_n.$$

3. D'après Bernhard Bolzano (1781-1848) et Karl Weierstrass (1815-1897). Ce théorème représente un des théorèmes fondamentaux d'Analyse.

Suite monotone et lim sup, lim inf. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante. Alors $y_n = y_0 = \sup\{x_k : k \geq 0\}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z_n = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante, alors $y_n = x_n$ et $z_n = z_0 = \inf\{x_k : k \geq 0\}$.

Exemple. La suite $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ est bornée mais elle n'est pas convergente. Nous avons

$$y_n = \sup\{x_k : k \geq n\} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ pair,} \\ 1 + \frac{1}{n+1} & \text{si } n \text{ impair,} \end{cases}$$

et donc $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$. Similairement on démontre $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = -1$.

Démonstration. (du théorème de Bolzano-Weierstrass) Soit $y_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$ et $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. Pour tout $\epsilon > 0$ et tout entier naturel N il existe $n \geq N$ tel que

$$|y_n - y| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Par construction de la suite y_n, il existe un indice $n_1 \geq n$ tel que $|x_{n_1} - y_n| < \frac{1}{2}\epsilon$. Donc $n_1 \geq N$ et

$$|x_{n_1} - y| = |x_{n_1} - y_n + y_n - y| \leq |x_{n_1} - y_n| + |y_n - y| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon.$$

Ceci implique que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre infini de $n_k \in \mathbb{N}$ et $n_k \geq N$ tel que $|x_{n_k} - y| < \epsilon$ (si n_k est l'indice trouvé, choisir $N = n_k + 1$ pour trouver un $n_{k+1} > n_k$ etc.). □

Proposition 2.4.1. lim inf, lim sup ***et suites convergentes.*** *Soit* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite et* x *un réel. Alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ *si et seulement si* $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. *Dans ce cas*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \limsup_{n\to+\infty} x_n = \liminf_{n\to+\infty} x_n. \tag{2.8}$$

Démonstration. Si $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, alors pour les y_n, z_n construits ci-dessus : $z_n \leq x_n \leq y_n$ et on conclut par le théorème de deux gendarmes. Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\limsup\limits_{n\to+\infty} x_n = y$ et $\liminf\limits_{n\to+\infty} x_n = z$ existent. La convergence des x_n implique que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un nombre naturel $N = N_\epsilon$ tel que $x_n \in]x - \epsilon, x + \epsilon[$ pour tout $n \geq N_\epsilon$ d'où $y_n, z_n \in]x - \epsilon, x + \epsilon[$ pour tout $n \geq N_\epsilon$. Par conséquent, $x = y = z$. □

Point d'accumulation d'une suite. On appelle $p \in \mathbb{R}$ un point d'accumulation d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = p$.

Proposition 2.4.2. - ***Adhérence d'un ensemble et point d'accumulation d'une suite.*** *Un point* a *est adhérent à un ensemble* $E \subset \mathbb{R}$ *si et seulement s'il existe une suite d'éléments* $a_n \in E$ *qui converge vers* a.

Démonstration. Si $a_n \in E$ converge vers a, alors pour tout $r > 0$ il existe un entier naturel N tel que $|a_n - a| < r$ pour tout $n \geq N$, c'est-à dire $a_n \in]a - r, a + r[\cap E$. Si a est adhérent à E, alors pour tout entier naturel n il existe un $a_n \in]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[\cap E$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a. □

Remarque. Si $a \in E$, on peut choisir la suite constante : $a_n = a$. Si E est majoré et $\sup E \notin E$, il existe une suite d'éléments $a_n \in E$ qui converge vers $\sup E$. Si E est minoré et $\inf E \notin E$, il existe une suite d'éléments $a_n \in E$ qui converge vers $\inf E$.

Exemple - l'adhérence de l'ensemble des valeurs d'une suite bornée. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée et considérons son ensemble de valeurs $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Par la proposition précédente, la réunion de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ avec l'ensemble des points d'accumulation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donne l'adhérence de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple - l'adhérence des rationnels. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (r_1, r_2, \ldots)$ la suite des rationnels dans $]0, 1[$. Alors tout $x \in [0, 1]$ est un point d'accumulation de cette suite. Donc l'adhérence de son ensemble des valeurs est $[0, 1]$.

Corollaire 2.6. ***- Suites dans un ensemble fermé.*** *Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble fermé et (x_n) un suite d'éléments $x_n \in E$. Alors tout point d'accumulation de (x_n) est dans E. En particulier, si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, alors $x \in E$.*

Démonstration. Soit x un point d'accumulation de (x_n). Par la proposition 2.4.2 $x \in \bar{E}$ et $\bar{E} = E$ puisque E est fermé. □

2.5 Suites de Cauchy

Introduction. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers x. Nous avons observé que les distances entre les éléments de la suite deviennent arbitrairement petites. Plus précisément, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - x| < \frac{1}{2}\epsilon$ pour tout $n \geq N$. Donc, pour tout entier $m, n \geq N$

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon.$$

C'est cette dernière propriété que nous prenons comme définition d'une famille de suites appelées suites de Cauchy.

Suites de Cauchy. Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *suite de Cauchy*[4] si à tout $\epsilon > 0$, on peut associer un $N = N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$ on a $|x_n - x_m| < \epsilon$.

Théorème 2.7. - ***Théorème fondamental des suites de Cauchy.*** *Une suite numérique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si et seulement si elle converge.*

Démonstration. Nous avons déjà vu que toute suite convergente est une suite de Cauchy. Pour montrer que toute suite de Cauchy converge, notons que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée car pour un ϵ donné, il existe un entier naturel N tel que $|x_n - x_N| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge. Soit x sa limite. Nous allons démontrer que toute la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. La

4. après Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N$

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2}\epsilon.$$

Il existe un élément de la sous-suite x_m tel que $m \geq N$ et $|x_m - x| < \frac{1}{2}\epsilon$. Donc pour tout $n \geq N$

$$|x_n - x| = |x_n - x_m + x_m - x| \leq |x_n - x_m| + |x_m - x| < \frac{1}{2}\epsilon + \frac{1}{2}\epsilon = \epsilon.$$

□

Remarque. On peut montrer que ce théorème est équivalent à l'axiome que tout ensemble majoré a un supremum. On peut donc caractériser la propriété de $\mathbb{R}$ d'être complet par le fait que toute suite de Cauchy converge.

2.6 Fonctions continues

Fonction continue. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $x \in D_f$. On dit que f est continue en x, si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments dans D_f telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x) = f\big(\lim_{n\to+\infty} x_n\big). \tag{2.9}$$

Nous notons cette propriété comme suit (voir aussi le chapitre 4) :

$$\lim_{\eta\to x} f(\eta) = f(x). \tag{2.10}$$

On dit que *la limite de $f(\eta)$ lorsque η tends vers x* est égale à $f(x)$. Même si cette notation ne donne plus explicitement la référence au domaine D_f de la fonction f, la limite $\lim_{\eta\to x} f(\eta)$ dépend de D_f puisque on peut seulement considérer des suites d'éléments dans D_f (voir l'exemple 6 ci-dessous). Une fonction f est continue sur D_f si elle est continue en tout $x \in D_f$. Il suit des règles de calcul pour les limites du théorème 2.1 et de la définition de la continuité :

Opérations sur des fonctions continues.

1. La somme et le produit de fonctions continues sont continues.
2. La composition de fonctions continues est continue.

Plus précisement on a :

Théorème 2.8. - ***Opérations sur des fonctions continues.***

1. *Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continues en a. Alors les fonctions $\lambda \cdot f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + g$ et $f \cdot g$ sont continues en a.*
2. *Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que f est continue en a et g est continue en $b = f(a)$. Alors la fonction $g \circ f$ est continue en a.*

2.6.1 Exemples de fonctions continues

1. Les fonctions polynômiales $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$ sont continues en tout $x \in \mathbb{R}$ puisque si $\lim_{i\to+\infty} x_i = x$, alors par les règles de calcul pour les limites $\lim_{i\to+\infty} x_i^2 = x^2$ et par récurrence $\lim_{i\to+\infty} x_i^k = x^k$ pour tout entier positif k et la somme de suites convergentes est convergente.
2. Par le même argument, les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.
3. $f(x) = |x|$ est continue en tout $x \in \mathbb{R}$: c'est le point 4. du théorème 2.1.
4. Les fonctions $\sin x, \cos x$ sont continues en tout $x \in \mathbb{R}$: noter d'abord que $\sin x$ est continue en $x = 0$ puisque $|\sin x| \leq |x|$ d'où pour toute suite telle que $\lim_{i\to+\infty} x_i = 0$ il suit que $\lim_{i\to+\infty} \sin x_i = 0$. Par le théorème de Pythagore, $\cos x$ est continue en $x = 0$. La continuité en tout $x \in \mathbb{R}$ est une conséquence des formules d'addition. Par exemple, si $\lim_{i\to+\infty} x_i = x$, alors
$$\begin{aligned}\lim_{i\to+\infty} \sin x_i &= \lim_{i\to+\infty} \sin(x_i - x + x)\\ &= \lim_{i\to+\infty} \sin(x_i - x)\cos x + \cos(x_i - x)\sin x\\ &= 0 \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x = \sin x.\end{aligned}$$
5. Pour illustrer le fait que la définition de la continuté s'applique aussi aux fonctions qui ne sont pas définies sur un intervalle, considérons la fonction $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a^x$ où a est un réel strictement positif. Cette fonction vérifie la définition d'une fonction continue sur son domaine $D_f = \mathbb{Q}$ si on pose $f(0) = 1$. En fait, soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels telle que $\lim_{k\to+\infty} x_k = x \in \mathbb{Q}$. En utilisant $a^{x_k} - a^x = a^x(a^{x_k - x} - 1)$ on note qu'il suffit étudier le cas $x = 0$. Il faut donc montrer que $\lim_{k\to+\infty} x_k = 0$ avec $x_k \in \mathbb{Q}$ implique $\lim_{k\to+\infty} a^{x_k} = 1 =: a^0$. Si $a = 1$ l'affirmation est triviale. Si $a > 1$ on note que $f(x)$ est strictement croissante. Pour tout entier positif n il existe un entier naturel $M = M_n$ tel que $-\frac{1}{n} < x_k < \frac{1}{n}$ pour tout $k \geq M_n$ (on a choisi $\epsilon = \frac{1}{n}$ dans la définition de la limite). Par conséquent,
$$a^{-\frac{1}{n}} < a^{x_k} < a^{\frac{1}{n}}.$$
Nous avons vu que $\lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ d'où l'affirmation par le théorème des deux gendarmes. Par le même raisonnement, on démontre la continuité si $a < 1$ pour toute suite de rationnels $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{k\to+\infty} x_k = x$.
6. Soit $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Alors f est constante sur son domaine donc continue et nous avons $\lim_{\eta\to x} f(\eta) = f(x)(= 1)$ en tout $x \in \mathbb{Q}$. Si on considère la fonction f comme fonction définie sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$, alors $\lim_{\eta\to x} f(\eta)$ n'existe plus puisque par la densité des rationnels et des irrationnels dans $\mathbb{R}$, pour tout

$x \in \mathbb{R}$ on peut prendre des suites de rationnels et des suites d'irrationnels qui convergent vers x donnant des suites constantes 1 ou 0 pour les valeurs de f.

7. Si $x \in D_f$ est un point isolé du domaine de f, alors f est toujours continue en x puisque l'unique suite d'éléments dans D_f qui converge vers x est la suite constante. Par conséquent toute fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue !

Prolongement par continuité. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $x \notin D_f$ un point adhérent à D_f. Si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments dans D_f telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l, \tag{2.11}$$

notée également $\lim\limits_{\eta\to x} f(\eta) = l$, alors le prolongement de f, noté $\tilde{f}$ et défini par

$$\tilde{f}(\eta) := \begin{cases} f(\eta), & \text{si } \eta \in D_f\,; \\ l, & \text{si } \eta = a. \end{cases} \tag{2.12}$$

est continue en $\eta = x$. On appelle $\tilde{f}$ le *prolongement par continuité* de f en $\eta = x$.

Exemples.

1. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$. Alors f admet un prolongement par continuité en $t = 0$ défini par $\tilde{f}(0) = 1$. C'est une conséquence du théorème des deux gendarmes en appliquant les inégalités
$$\cos t \leq \frac{\sin t}{t} \leq 1$$
pour tous $t \neq 0$, $|t| \leq \frac{\pi}{2}$ et la continuité de $\cos t$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par $g(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$. Alors g admet un prolongement par continuité en $x = a$ défini par $\tilde{g}(0) = 2a$. En fait, notons d'abord que a est adhérent au domaine de g. Alors pour toute suite d'éléments $x_n \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$ qui converge vers a, on a
$$\lim_{n\to+\infty} g(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{(x_n - a)(x_n + a)}{x_n - a} = \lim_{n\to+\infty} (x_n + a) = 2a.$$
La fonction g donne les pentes des sécantes de la fonction $h(x) = x^2$ entre les points $(a, h(a))$ et $(x, h(x))$, $x \neq a$. L'existence d'un prolongement par continuité signifie que le graphe de $h(x) = x^2$ admet une tangente en $(a, h(a))$ avec la pente donné par le prolongement par continuité en $x = a$: $\tilde{g}(a) = 2a$. Nous allons voir au chapitre 5 que cette condition nous sert à définir la dérivée d'une fonction.

3. Considérons encore la fonction $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = a^x$ où a est un réel strictement positif. Nous pouvons donner un prolongement par continutité défini en tout $x \in \mathbb{R}$ par la définition
$$a^x := \lim_{k\to+\infty} a^{x_k}. \tag{2.13}$$

Par le même argument que présenté ci-dessus, on peut vérifier que ce prolongement donne une fonction continue sur $\mathbb{R}$ puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Par une méthode différente et plus élégante, nous allons démontrer au chapitre 3 qu'il existe en fait un unique prolongement par continuité donnée par l'équation (2.13).

Limite d'une fonction. La défintion suivante couvre les deux situations discutées ci-dessus. Soit $f : D_f \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$ adhérent à D_f. S'il existe un $l \in \mathbb{R}$ tel que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments dans D_f telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$, on dit que la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a est égale à l et on note

$$\lim_{x\to a} f(x) = l. \tag{2.14}$$

Il en suit pour les deux cas $a \in D_f$ et $a \notin D_f$:

1. si $a \in D_f$, alors la limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe si et seulement si f est continue en a et dans ce cas $l = f(a)$ (prende la suite constante avec $x_n = a$)
2. si $a \notin D_f$, alors la limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe si et seulement si f admet un prolongement par continuité en a, noté $\tilde{f} : D_f \cup \{a\} \to \mathbb{R}$ et dans ce cas $l = \tilde{f}(a)$.

Nous allons discuter la notion de la *limite d'une fonction* plus profondément au chapitre 4 dans lequel on étend également cette notion aux suites fortement divergentes qui séront présentées au chapitre 2.7.

2.6.2 Applications du théorème de Bolzano-Weierstrass aux fonctions continues sur $[a, b]$

Introduction. Les propriétés importantes des fonctions continues définies sur un intervalle borné et fermé sont des conséquences du théorème de Bolzano-Weierstrass. Ici nous montrons que toute fonction continue sur un intervalle borné et fermé atteint ses valeurs extrémales. Pour une autre conséquence sur la continuité uniforme des fonctions voir chapitre 4.

Maximum et minimum d'une fonction. Soit $D, T \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to T$. Alors $\sup\{f(x) : x \in D\}$ et $\inf\{f(x) : x \in D\}$ sont appelés le supremum respectivement l'infimum de f et on les note $\sup\limits_{x\in D} f(x)$ respectivement $\inf\limits_{x\in D} f(x)$. On dit que f atteint son maximum (respectivement son minimum) en $a \in D$ si $f(a) = \sup\limits_{x\in D} f(x)$ (resp. $\inf\limits_{x\in D} f(x)$) et on le note $f(a) = \max\limits_{x\in D} f(x)$ (resp. $f(a) = \min\limits_{x\in D} f(x)$).

Théorème 2.9. *Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle borné et fermé $[a, b]$. Alors f atteint son maximum et son minimum.*

Démonstration. Il suffit de montrer que la fonction f atteint son maximum car $\min\limits_{x\in D} f(x) = -\max\limits_{x\in D}(-f(x))$ et $-f$ est continue. Soit $S := \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$. (Noter que $S = \infty$ si f n'est pas bornée). Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments $x_n \in [a, b]$

telle que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = S$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (car $[a,b]$ est borné), donc par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe un sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge. Notons p la limite de cette sous-suite. L'intervalle $[a,b]$ est fermé, donc $p \in [a,b]$. Par la continuité de f nous avons

$$f(p) = \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = S.$$

En particulier, $S < \infty$ donc f est bornée et atteint son maximum. □

Remarque. Si l'intervalle est ouvert, semi-ouvert ou non-borné ce résultat n'est plus valable. Par exemple, la fonction identité $x \mapsto x$ définie sur $]0,1[$ est bornée et continue mais n'atteint ni son supremum 1 ni son infimum 0.

Théorème 2.10. ***- Théorème de la valeur intermédiaire.*** *Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle borné et fermé $[a,b]$ et $f(a) < f(b)$. Alors pour tout nombre réel r tel que $f(a) < r < f(b)$, il existe un $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = r$. r est dit valeur intermédiaire.*

Démonstration. On considère l'ensemble borné $E = \{x \in [a,b] : f(x) \leq r\}$. Noter que $E \neq \emptyset$ puisque $a \in E$. On pose $c := \sup E$. c est un point adhérent à E, donc il existe une suite d'éléments $x_n \in S$ qui convege vers c. Par la continuité de f :

$$f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \leq r.$$

$r < f(b)$ implique $c < b$. Par conséquent, l'intervalle semi-ouvert $]c,b]$ est non vide et $f(x) > r$ pour tout $x \in]c,b]$. Par conséquent,

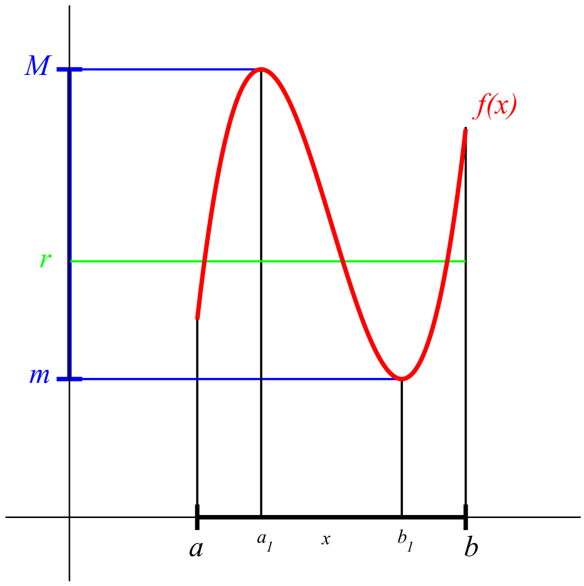
$$f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(c + \frac{1}{n}) \geq r.$$

d'où $f(c) = r$. □

Remarque. Si $f(a) > f(b)$, la conclusion du théorème de la valeur intermédiaire reste évidemment vraie en appliquant le théorème à $-f$.

Théorème 2.11. ***- Théorème du transport des intervalles.*** *Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle borné et fermé $[a,b]$. Alors l'ensemble des images de f est l'intervalle borné et fermé $[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x\in[a,b]} f(x)]$.*

Démonstration. Le théorème du transport des intervalles est un corollaire du théorème 2.9 et du théorème de la valeur intermédiaire. □



L'image d'une fonction continue sur $[a, b]$ et le théorème de la valeur intermédiaire.

Corollaire (Solutions des équations). Soit f une fonction continue définie sur l'intervalle borné et fermé $[a, b]$ et $f(a)f(b) \leq 0$. Alors léquation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Proposition 2.6.1. *Soit $h : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Alors l'équation*

$$x = h(x)$$

admet au moins une solution $\hat{x}$ dans $[0, 1]$. On appelle $\hat{x}$ un point fixe de h [5]*. Plus généralement, soit $g : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue et surjective. Alors l'équation*

$$g(x) = h(x)$$

admet au moins une solution $\hat{x}$ dans $[0, 1]$.

Démonstration. Posons $f(x) = g(x) - h(x)$. La fonction g est surjective, alors il existe $c, d \in [0, 1]$ tels que $g(c) = 0$ et $g(d) = 1$. Par conséquent $f(c) = -h(c) \leq 0$ et $f(d) = 1 - h(d) \geq 0$. Par le corollaire ci-dessus il existe un $\hat{x}$ tel que $f(\hat{x}) = 0$. En particulier, si $g(x) = x$, g est surjective et il existe un point fixe de h. □

Proposition 2.6.2.

1. *Soit I un intervalle et $f : I \to J$ une fonction continue et injective. Alors f est strictement monotone.*
2. *Soit I un intervalle et $f : I \to J$ une fonction continue et bijective. Alors sa fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue.*

Démonstration.

1. Il suffit de considérer le cas $I = [a, b]$, sinon prendre $a, b \in I, a < b$ arbitraire pour montrer la stricte monotonie sur tout sous-intervalle borné et fermé de I, donc sur I. Sans perte de généralité on peut

5. C'est le théorème de Brouwer (1881-1966) pour des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

supposer que $f(a) < f(b)$. Soit $x_1, x_2 \in]a, b[, x_1 < x_2$ arbitraires. L'injectivité de f implique que $f(x_1), f(x_2) \in]f(a), f(b)[$ puisque si, par exemple, $f(x_1) < f(a)$ alors le théorème de la valeur intermédiaire garantit l'existence d'un $c \in]x_1, b[$ tel que $f(c) = f(a)$ ce qui est en contradiction avec l'injectivité. De plus $f(x_1) \neq f(x_2)$. Si $f(x_1) > f(x_2)$ par le théorème de la valeur intermédiaire il existe $c \in]x_2, b[$ tel que $f(c) = f(x_1)$ d'où la contradiction.

2. Comme avant il suffit de considérer le cas $I = [a, b]$. Sans perte de généralité on peut supposer que $f(a) < f(b)$, c'est-à-dire f est strictement croissante d'où $J = [f(a), f(b)]$. Soit (y_n) une suite d'éléments $y_n \in J$ qui converge vers y. Noter que $y \in J$ car J est fermé. On définit $x_n := f^{-1}(y_n)$. Alors $x_n \in I = [a, b]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(x_{n_k}) = (f^{-1}(y_{n_k}))$ qui converge vers un $x \in I$:

$$x = \lim_{k \to +\infty} f^{-1}(y_{n_k}).$$

En appliquant la fonction continue f à cette identité on obtient :

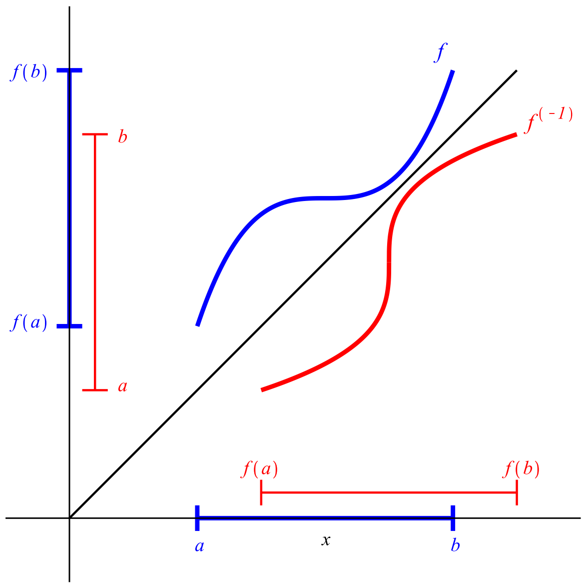
$$f(x) = f(\lim_{k \to +\infty} f^{-1}(y_{n_k})) = \lim_{k \to +\infty} f(f^{-1}(y_{n_k})) = y.$$

S'il y a une autre sous-suite $(x_{m_k}) = (f^{-1}(y_{m_k}))$ avec limite $\bar{x} \in I$ on trouve par le même argument que $f(\bar{x}) = y$ d'où $x = \bar{x}$ grâce à l'injectivité de f. Par conséquent, toute la suite (x_n) converge vers x. Il en suit que pour toute suite (y_n) une suite d'éléments $y_n \in J$ qui converge vers y :

$$\lim_{n \to +\infty} f^{-1}(y_n) = x = f^{-1}(y),$$

c'est-à-dire f^{-1} est continue en tout $y \in J$.

□



Une fonction continue strictement monotone sur $[a, b]$ et sa fonction réciproque.

2.7 Suites fortement divergentes

Introduction. Parmi toutes les suites divergentes, nous distinguerons en particulier celles qui tendent vers l'infini.

Définition. On dit que la suite (x_n) tend vers ∞ (respectivement $-\infty$) , si pour tout $C \in \mathbb{R}$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n > C$ (respectivement $x_n < C$) et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$ (respectivement $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$). Une suite est *dite fortement divergente* si elle tend vers ∞ (respectivement $-\infty$).

Exemple. La *suite arithmétique* définie par $x_{n+1} = x_n + d$ et $x_0 = a$ tend vers ∞ si $d > 0$ et tend vers $-\infty$ si $d < 0$. En effet, par récurrence on peut facilement démontrer que $x_n = a + nd$.

Règles de calcul pour des valeurs limites. Dans certains cas, les règles de calcul (2.1)-(2.3) pour des valeurs limites de suites convergentes s'étendent aux suites fortement divergentes si nous définissons les règles suivantes.

Théorème 2.12. ***- Règles de calcul pour le symbole*** ∞***.***

$$\infty + \infty = \infty, \quad \infty \cdot \infty = \infty, \quad 0/\infty = 0$$

$$c + \infty = \infty, \quad c/\infty = 0, \quad \textit{pour tout} \quad c \in \mathbb{R}$$
$$c \cdot \infty = \infty, \quad \textit{pour tout} \quad c > 0$$

Remarque. Evidemment on ne définit pas les expressions dites indéfinies comme $0 \cdot \infty$, ∞/∞, $\infty - \infty$, $\infty/0$ ou $c/0$.

2.8 Limites des suites récurrentes

On présente une approche assez générale pour résoudre les exercices qui consistent à déterminer la limite d'une suite récurrente. Les suites à étudier sont des récurrences linéaires de la forme $x_{n+1} = qx_n + b$ ou $x_{n+1} = (1 - q)x_n + qx_{n-1}$ et des récurrences non-linéaires $x_{n+1} = f(x_n)$. La théorie et l'algorithme pour résoudre explicitement les suites linéaires sont traités soit dans un cours d'algèbre linéaire soit dans un cours sur des équations différentielles et des systèmes dynamiques. Ici on s'intéresse uniquement au problème de convergence. Pour des suites non-linéaires, on présente une méthode générale pour étudier le problème de convergence.

2.8.1 Suites récurrentes linéaires

La récurrence $x_{n+1} = qx_n + b$

Suites géométriques. Soit $a, q \in \mathbb{R}$ (ou plus généralement $a, q \in \mathbb{C}$). Considérons la suite géométrique $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_n = aq^n \tag{2.15}$$

Une suite géométrique est caractérisée par la propriété $x_{n+1} = qx_n$ et la valeur initiale $x_0 = a$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si $|q| < 1$ ou $q = 1$ sinon elle est divergente (sauf si $a = 0$). Plus précisement, si (x_n) est une suite satisfaisant $x_{n+1} = qx_n$ et $x_0 = a \neq 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } |q| < 1, \\ a & \text{si } q = 1, \\ +\infty \operatorname{sgn}(a) & \text{si } q > 1, \\ \text{n'existe pas} & \text{autrement pour } a \neq 0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Suites récurrentes. Soit x_n définie par

$$x_{n+1} = qx_n + b \quad \text{et} \quad x_0 = a \tag{2.17}$$

pour un $b \neq 0$. Nous supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et tend vers une limite x. La limite x est nécessairement une solution de l'équation linéaire

$$x = qx + b \quad \text{i.e.} \quad x = \frac{b}{1-q} \tag{2.18}$$

Par conséquent, si $q = 1$ la suite ne converge pas. On définit y_n par $y_n = x_n - x$. En cas de convergence, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit converger vers 0. En utilisant $x = qx + b$ nous trouvons

$$x_{n+1} - x = qx_n + b - qx - b = q(x_n - x)$$

ou

$$y_{n+1} = qy_n \tag{2.19}$$

et $y_0 = x_0 - x = a - x$. On en déduit le résultat suivant :

Proposition 2.8.1. - *Universalité de la limite. La suite récurrente définie par (2.17) converge pour toute valeur initiale x_0 si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{b}{1-q}.$$

En particulier, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par

$$x_n = \frac{b}{1-q} - \frac{bq^n}{1-q} + x_0 q^n.$$

Exemple. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}(3x_n + 1), \quad x_0 = 0$$

Corrigé. Supposons que (x_n) converge. Notons x sa limite qui satisfait $x = \frac{1}{4}(3x + 1)$, i.e. $x = 1$. Posons $y_n = x_n - x = x_n - 1$. Alors

$$x_{n+1} - 1 = \frac{1}{4}(3x_n + 1) - 1 = \frac{3}{4}(x_n - 1)$$

ou

$$y_{n+1} = \frac{3}{4} y_n$$

et $y_0 = x_0 - 1 = -1$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique avec $q = \frac{3}{4}$. Donc $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Par conséquent, $x_n = y_n + x = y_n + 1$ converge vers 1.

La récurrence $x_{n+1} = (1-q)x_n + qx_{n-1}$

Transformation du problème. Considérons la suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = (1-q)x_n + qx_{n-1} \quad \text{et} \quad x_0 = a_0,\, x_1 = a_1 \tag{2.20}$$

où $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$. La stratégie présentée avant (i.e. supposer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer la limite pour construire une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers zéro) ne s'applique plus directement car l'équation pour la limite x donne l'équation triviale $x = (1-q)x + qx$ qui est satisfaite pour tout x. Pour trouver de nouveau une suite géométrique, on définit d'abord une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $d_n = x_n - x_{n-1}$. La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} d_{n+1} = x_{n+1} - x_n &= (1-q)x_n + qx_{n-1} - x_n \\ &= -qx_n + qx_{n-1} \\ &= -qd_n \end{aligned}$$

et $d_1 = x_1 - x_0 = a_1 - a_0$. Donc $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Ensuite on définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $s_n = x_n + qx_{n-1}$. La suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence

$$\begin{aligned} s_{n+1} = x_{n+1} + qx_n &= (1-q)x_n + qx_{n-1} + qx_n \\ &= x_n + qx_{n-1} \\ &= s_n \end{aligned}$$

et $s_1 = x_1 + qx_0 = a_1 + qa_0$. Donc $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante. On en déduit le résultat suivant :

Proposition 2.8.2. *La suite récurrente définie par (2.20) converge pour tout couple $(x_0, x_1) = (a_0, a_1)$ si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{a_1 + qa_0}{1+q}$$

Démonstration. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est de Cauchy, donc si et seulement si la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, i.e. $|q| < 1$. Pour calculer sa limite on utilise la suite constante (s_n). On pose $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$. Alors

$$a_1 + qa_0 = s_1 = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} + q \lim_{n\to+\infty} x_n = (1+q)x.$$

□

Remarque. La relation de récurrence (2.20) est une relation de récurrence linéaire qui peut être résolue explicitement (voir algèbre linéaire). On trouve que

$$x_n = \frac{a_1 + qa_0}{1+q} + \frac{(a_0 - a_1)(-q)^n}{1+q}.$$

On peut vérifier ce résultat par récurrence.

2.8.2 Suites récurrentes non-linéaires

Une méthode générale. Soit x_n définie par

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = a \tag{2.21}$$

pour une fonction réelle continue f. Nous supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et tend vers une limite x^*. La limite x est nécessairement une solution de l'équation

$$x^* = f(x^*). \tag{2.22}$$

Une telle solution x^* est aussi appelée un point fixe de f. Supposons que cette équation possède une seule solution. (S'il existe plusieurs solutions, on prend celle qui semble être la bonne limite ou on cherche des bornes sur la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour exclure toutes les solutions sauf une ; s'il n'y a pas de solution, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger). Comme pour le cas linéaire, on définit y_n par $y_n = x_n - x^*$. En cas de convergence, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ doit converger vers 0. En utilisant $x^* = f(x^*)$ nous trouvons

$$x_{n+1} - x^* = f(x_n) - f(x^*)$$

ou

$$y_{n+1} = f(x^* + y_n) - f(x^*) \tag{2.23}$$

Ensuite on essaie de trouver des estimations de y_n qui garantissent que $|f(x^* + y_n) - f(x^*)| \leq q|y_n|$ pour une constante $q \in \mathbb{R}$ telle que $0 < q < 1$. Dans ce cas

$$|y_{n+1}| \leq q|y_n|$$

et donc par récurrence

$$|y_n| \leq q^n|y_0|$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to+\infty} x_n = x^*.$$

2.8.3 Exercices avec corrigés

Introduction. Les exercices sont résolus par la méthode présentée ci-dessus. Bien évidemment il n'est pas exclu que pour certains problèmes il existe une solution plus directe.

Problème 1. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(3x_n - x_n^2 + 4), \quad x_0 = 0.$$

Corrigé. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite x est une solution de l'équation de degré 2 :

$$x = \frac{1}{3}(3x - x^2 + 4)$$

qui admet les deux racines $x_+ = 2$ et $x_- = -2$. Nous allons exclure la solution $x_- = -2$. Notons que $\frac{1}{3}(3x - x^2 + 4)$ admet son maximum pour $x_{\max} = \frac{3}{2}$. Donc

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(3x_n - x_n^2 + 4) \leq \frac{1}{3}(3x_{\max} - x_{\max}^2 + 4) = \frac{25}{12}$$

pour tout $n \geq 0$. Nous allons montrer que $x_n \geq 0$ implique $x_{n+1} \geq 0$. D'après l'inégalité ci-dessus, nous avons $x_n \leq \frac{25}{12}$. Notons d'abord que $\frac{1}{3}(3x - x^2 + 4) = \frac{1}{3}(1 + x)(4 - x)$. Donc si $x_n \geq 0$, alors

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + x_n)(4 - x_n) \geq 0$$

car les deux facteurs sont positifs. Par conséquent, si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge sa limite est $x = x_+ = 2$.

Ensuite nous montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Posons $y_n = x_n - x = x - 2$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait

$$\begin{aligned} y_{n+1} = x_{n+1} - 2 &= \frac{1}{3}(3x_n - x_n^2 + 4) - 2 \\ &= \frac{1}{3}(1 - x_n)(x_n - 2) \\ &= \frac{1}{3}(1 - x_n)y_n. \end{aligned}$$

Noter que $0 \leq x_n \leq 25/12$ implique $-13/12 \leq 1 - x_n \leq 1$ et donc

$$\left|\frac{1 - x_n}{3}\right| \leq \frac{13}{36} = q$$

ce qui implique la convergence, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$.

Problème 2. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{3x_n + 1}, \quad x_0 = 1$$

Corrigé. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite x est une solution de l'équation de degré 2 :

$$x = \frac{x + 1}{3x + 1}$$

qui admet les deux racines $x_+ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ et $x_- = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$. On montre facilement par récurrence que $x_n \geq 0$ implique $x_{n+1} \geq 0$, donc $x_n \geq 0$ pour tout entier naturel n car $x_0 = 1 \geq 0$. Par conséquent, si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle converge vers $x = x_+ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$. Posons $y_n = x_n - x = x_n - \frac{1}{3}\sqrt{3}$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait

$$\begin{aligned} y_{n+1} = x_{n+1} - x &= \frac{x_n + 1}{3x_n + 1} - \frac{x + 1}{3x + 1} \\ &= -2\frac{x_n - x}{(3x + 1)(3x_n + 1)} \\ &= \frac{-2y_n}{(3x + 1)(3x_n + 1)} \end{aligned}$$

De plus, en utilisant $x_n \geq 0$ nous avons

$$\left|\frac{-2}{(3x + 1)(3x_n + 1)}\right| \leq \frac{2}{3x + 1} = \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = q < 1$$

d'où la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{3}\sqrt{3}$.

Problème 3. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}, \quad x_0 = 0$$

Corrigé. C'est un problème du même type que le problème 2. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite x est une solution de l'équation de degré 2 :

$$x = \frac{1}{1+x}$$

qui admet les deux racines $x_+ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ et $x_- = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$. On montre facilement par récurrence que $x_n \geq 0$ implique $x_{n+1} \geq 0$, donc $x_n \geq 0$ pour tout entier naturel n car $x_0 = 0$. Par conséquent, si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, elle converge vers $x = x_+ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Posons $y_n = x_n - x$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait

$$\begin{aligned} y_{n+1} = x_{n+1} - x &= \frac{1}{1+x_n} - \frac{1}{1+x} \\ &= -\frac{x_n - x}{(1+x)(1+x_n)} \\ &= \frac{-y_n}{(1+x)(1+x_n)}. \end{aligned}$$

De plus, en utilisant $x_n \geq 0$ nous avons

$$\left| \frac{-1}{(1+x)(1+x_n)} \right| \leq \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = q < 1$$

d'où la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$

Remarque. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ représente le développement de $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ en fraction continue :

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}.$$

Problème 4. Calculer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n}, \quad x_0 = 1.$$

Corrigé. On va appliquer la même méthode. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite x est une solution de l'équation de degré 2 :

$$x^2 = 3x$$

qui admet les deux racines $x_+ = 3$ et $x_- = 0$. On montre facilement par récurrence que $x_n \geq 1$ implique $x_{n+1} \geq 1$, donc $x_n \geq 1$ pour tout entier naturel

n car $x_0 = 1$. Par conséquent, si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle converge vers $x = x_+ = 3$. Posons $y_n = x_n - x$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait

$$\begin{aligned} y_{n+1} = x_{n+1} - x &= \sqrt{3x_n} - \sqrt{3x} \\ &= \sqrt{3}\frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{y_n\sqrt{3}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

De plus, en utilisant $x_n \geq 1$ nous avons

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = q < 1$$

d'où la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 3$.

Remarque. On peut facilement donner la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ explicitement : on pose $z_n = \ln x_n$, alors z_n vérifie la relation de récurrence linéaire :

$$z_{n+1} = \frac{z_n}{2} + \frac{\ln 3}{2}, \quad z_0 = 0.$$

Sa solution est donnée par

$$z_n = \ln(3)\big(1 - 2^{-n}\big)$$

donc

$$x_n = 3 \cdot 3^{-2^{-n}}.$$

2.8.4 Le théorème du point fixe de Banach

En généralisant la méthode presentée dans 2.8.2, on peut démontrer un théorème célèbre (et important !) :

Théorème 2.13. - ***théorème du point fixe de Banach.***[6] *Soit I un intervalle fermé et $f : I \to I$ une application contractante, c'est-à-dire il existe $0 < q < 1$ tel que*

$$|f(x) - f(x')| \leq q|x - x'| \tag{2.24}$$

pour tout $x, x' \in I$. Alors f admet un unique point fixe x^* dans I.

Démonstration. Pour $x_0 \in I$, on considère la récurrence (2.21). Notons d'abord que $x_n \in I$ implique $x_{n+1} \in I$ puisque $f : I \to I$. Par récurrence pour tout entier naturel n :

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq q|x_n - x_{n-1}| = \ldots \leq q^n|x_1 - x_0|.$$

6. D'après Stefan Banach (1892 - 1945). Nous le considérons avec le théorème de Bolzano-Weierstrass comme un des théorèmes fondamentaux de l'Analyse. Ses applications principales au calcul différentiel et intégrale seront discutées en Analyse 2.

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy puisque pour tout n, k des entiers positifs, par une somme téléscopique et l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}|x_{n+k} - x_n| &= \Big|\sum_{i=1}^{k}(x_{n+i} - x_{n+i-1})\Big| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k}|x_{n+i} - x_{n+i-1}| \\ &\leq \sum_{i=1}^{k} q^{n+i-1}|x_1 - x_0| = q^n|x_1 - x_0|\sum_{i=1}^{k} q^{i-1} \\ &\leq \frac{q^n|x_1 - x_0|}{1-q}.\end{aligned}$$

Soit x^* la limite de cette suite. Noter que $x^* \in I$ puisque I est fermé. On montre que x^* est un point fixe de f. Pour tout n :

$$\begin{aligned}|f(x^*) - x^*| &= |f(x^*) - f(x_n) + x_{n+1} - x^*| \\ &\leq |f(x^*) - f(x_n)| + |x_{n+1} - x^*| \\ &\leq q|x_n - x^*| + |x_{n+1} - x^*| \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty.\end{aligned}$$

Il reste à démontrer l'unicité. Soit $x^{**} \in I$ un autre point fixe, alors

$$|x^{**} - x^*| = |f(x^{**}) - f(x^*)| \leq q|x^{**} - x^*|$$

d'où $x^{**} = x^*$. □

Remarque. La propriété d'être une application contractante seule ne suffit pas pour garantir l'existence d'un point fixe dans I. Il faut que $f[I]$ soit dans I (pour pouvoir appliquer le théorème cette adaptation de f représente souvent la partie difficile !). Par exemple, soit $I = [0, 1]$ et $f(x) = \frac{x+a}{2}$, $a \geq 0$. Alors f est contractante et $f[I] = [0, \frac{1+a}{2}]$. Le théorème assure l'existence d'un point fixe unique dans I si $a \leq 1$. Si $a > 1$, alors $f[I]$ n'est plus dans I. Par un calcul explicite on voit que $x^* = a$ est l'unique point fixe de f sur $\mathbb{R}$, mais $a \notin I$ et f n'a aucun point fixe dans I.

Remarque. Le théorème du point fixe nous assure l'existence d'une solution unique x^* de l'équation $x = f(x)$ dans I pour toute application contractante $f : I \to I$. Il suit de la démonstration que toute suite récurrente définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ avec condition initiale x_0 dans I converge vers x^*. Le théorème permet donc d'analyser plus profondément ces récurrences. Pour l'illustrer, nous allons réexaminer un exemple précédent :

Exemple. On considère la récurrence définie par

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}(3x_n - x_n^2 + 4).$$

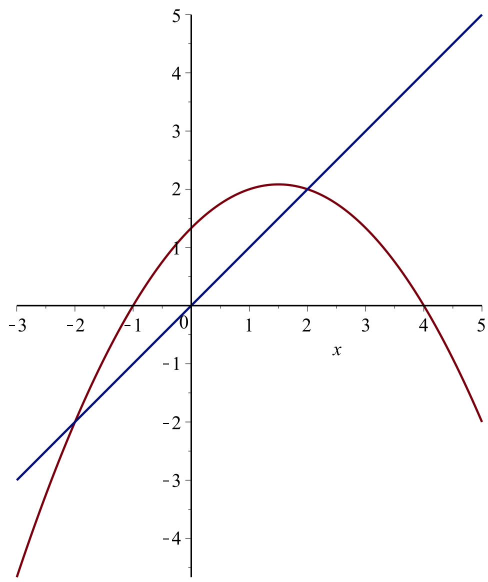
Pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe, on espère pouvoir trouver un intervalle fermé I sur lequel $f(x) := \frac{1}{3}(3x - x^2 + 4)$ est une application contractante $f : I \to I$. On avait déjà démontré que $f(x) \leq \frac{25}{12} = f(\frac{3}{2})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [-1, 4]$ (les zéros se trouvent en -1 et 4). Par conséquent, $f : [-1, 4] \to [0, \frac{25}{12}] \subset [-1, 4]$. Il faut encore vérifier si f est une application contractante sur ce domaine. On a

$$f(x) - f(x') = (x - x')\frac{3 - x - x'}{3}.$$

Donc f n'est pas une application contractante sur ce domaine puisqu'en choisissant $x = 3$, $x' = 4$ le deuxième facteur devient $-4/3$ donc plus grand que 1 en valeur absolue (de même pour $x, x' \leq 0$). On essaie de prendre un domaine plus petit. Un choix suffisant est, par exemple, $I = [1, \frac{5}{2}]$ puisque $f(x) \in [1, \frac{25}{12}] \subset I$ pour tout $x \in I$ et

$$\frac{-2}{3} \leq \frac{3 - x - x'}{3} \leq \frac{1}{3}$$

donc le choix $q = 2/3$ est admissible. Par le théorème du point fixe de Banach pour toute valeur initiale $x_0 \in I$, la suite définie par cette récurrence converge vers le point fixe $x^* = 2$. Noter que la valeur initiale $x_0 = 0$ n'est pas dans I, mais $x_1 = 4/3 \in I$ d'où la convergence vers $x^* = 2$.



Le graphe de $f(x) := \frac{1}{3}(3x - x^2 + 4)$ et la droite d'équation $y = x$.

2.9 Supplément : Suites de nombres complexes

Les résultats de ce chapitre s'étendent aux suites des nombres complexes à l'exception des critères de convergence qui sont basés sur les propriétés d'un corps ordonné. Le module $|\cdot|$ remplace la valeur absolue pour mesurer la distance entre les nombres. Par conséquent, en analogie avec la formulation métrique du processus de limite dans l'équation (2.1), on définit la convergence d'une suite des nombres complexes z_n :

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = z \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} |z_n - z| = 0. \tag{2.25}$$

Une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|z_n| \leq C$ pour tous $n \in \mathbb{N}$. Toute suite bornée vérifie le théorème de Bolzano-Weierstrass :

Théorème 2.14. ***- théorème de Bolzano-Weierstrass pour des suites dans*** $\mathbb{C}$. *De toute suite bornée* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, on peut extraire une sous-suite convergente* $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $z_n = x_n + iy_n$ avec $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ la partie rélle et la partie imaginaire de z_n. Par la définition du module, les suites numériques $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées puisque $|x_n| \leq |z_n| \leq C$ et $|y_n| \leq |z_n| \leq C$ pour un $C > 0$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass pour des suites numériques, il existe une sous-suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ convergente. Ensuite on applique le théorème de Bolzano-Weierstrass à la sous-suite $(y_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ pour extraire une sous-suite convergente, notée $(y_{n_{m_k}})_{k\in\mathbb{N}}$. Par construction, la suite $(x_{n_{m_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de la suit convergente $(x_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ donc convergente. Il en suit la convergence de $(z_{n_{m_k}})_{k\in\mathbb{N}}$. □

Comme avant, le théorème de Bolzano-Weierstrass implique le théorème fondamental des suites de Cauchy :

Théorème 2.15. ***- théorème fondamental des suites de Cauchy dans*** $\mathbb{C}$. *Une suite* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy si et seulement si elle converge.*

2.9.1 Fonctions continues

La défintion des fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ ou $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est donnée par la commutativité avec le processus de limite comme dans l'équation (2.9).

Exemples de fonctions continues.

1. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(x) = e^{ipx} := \cos(px) + i\sin(px)$, $p \in \mathbb{R}$ est continue en tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Les fonctions $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ données par $f(z) = z + \bar{z}$, $f(z) = i(\bar{z} - z)$, $f(z) = z\bar{z}$ et $f(z) = |z|$ sont continues en tout $z \in \mathbb{C}$.
3. Les fonctions polynomiales $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ données par $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$, $a_k \in \mathbb{C}$ sont continues en tout $z \in \mathbb{C}$.
4. Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue en $z_0 \in \mathbb{C}$, alors $f(\bar{z})$ et $\overline{f(z)}$ sont continues en $z_0 \in \mathbb{C}$.