Chapitre 5

Calcul différentiel

Nous présentons les techniques de base du calcul différentiel.

Notions à apprendre. Dérivée et fonction dérivable, fonction dérivée, règle de composition, théorèmes des accroissements finis, la classe C^n, développement limité, série entière, extremum locale, point d'inflexion, asymptote, fonction convexe, règle de l'Hospital.

Compétences à acquérir. Connaître les fonctions dérivées des fonctions élémentaires, connaître et savoir appliquer les propriétés de la dérivée au calcul des dérivées, savoir faire le développement limité d'une fonction, savoir appliquer la règle de l'Hospital aux calculs des limites, savoir faire l'étude d'une fonction, savoir calculer la série entière des fonctions élémentaires et déterminer son rayon de convergence.

5.1 La dérivée

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in D$ un point limite de D. Ces conditions sont vérifiées pour tout $a \in D$ si $D = I$ est un intervalle qui contient un intervalle ouvert non-vide.

Définition. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite *dérivable* en $a \in D$ si la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée la *dérivée* de la fonction f au point a et on la note $f'(a)$.

Remarque. Noter que le quotient $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ n'est pas défini en a d'où $x \neq a$ (et $x \in D$). C'est pourquoi on ne se réfère pas explicitement à la limite épointée $\lim\limits_{x \to a, x \neq a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. En posant $h = x - a$ avec $a + h \in D \setminus \{a\}$ (c'est-à-dire

$h \neq 0$) nous pouvons aussi écrire

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{5.1}$$

Interprétation géométrique - problème de la tangente. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On veut construire la tangente en un point $(a, f(a))$ d'une courbe $(x, f(x))$ donnée. Ce problème débouche sur le calcul différentiel car on cherche à savoir si la pente de la sécante donnée par la droite de $(a, f(a))$ à $(x, f(x))$ pour $x \in D \setminus \{a\}$ a une valeur limite, la pente de la tangente en $(a, f(a))$. Or la pente de la sécante est donnée par

$$m_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{si } x \in D \setminus \{a\}$$

et si la limite existe lorsque x tend vers a, la dérivée $f'(a)$ équivaut à un prolongement par continuité de $m_a(x)$ en a, i.e. :

$$\widetilde{m}_a(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \in D \setminus \{a\}, \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \tag{5.2}$$

est une fonction continue en $a \in D$. L'équation de la tangente en a est donnée par

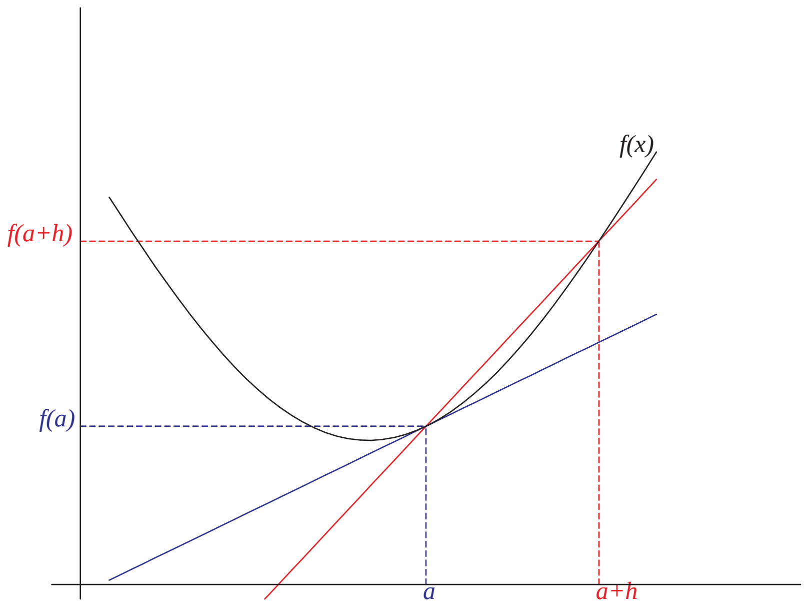
$$t_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad \text{ou} \quad t_a(a + h) = f(a) + f'(a)h.$$

Notons d'abord que pour tout $x \in D$, on peut écrire

$$f(x) = f(a) + (x - a)\widetilde{m}_a(x)$$

Ceci implique la

Proposition. Si une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in D$, alors f est continue en a.



Les graphes de $f(x)$, du segment $f(a) + \frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x - a)$ et de la tangente $t_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

Approximation d'une fonction dans un voisinage. On s'attend à avoir $f(x) \approx f(a)+f'(a)(x-a)$ pour x suffisament proche de a. Ou, plus précisement, la propriété d'être dérivable est équivalente à la propriété que f peut être approchée par une fonction affine-linéaire. Ce résultat et la qualité de l'approximation sont donnés dans la proposition suivante. Introduisons d'abord une nouvelle notation :

Notation $O(h)$ et $o(h)$. Nous disons qu'une expression $f(h)$ est $O(h)$ (lire : grand O de h) lorsque h tend vers zéro et on le note $f(h) = O(h)$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f(h)| \leq C|h|$ pour tout h suffisamment petit. En particulier, il en suit $\lim\limits_{h\to 0} f(h) = 0$. Nous disons qu'une expression $f(h)$ est $o(h)$ (lire : petit o de h) lorsque h tend vers zéro et on le note $f(h) = o(h)$ si $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$. Ces notions représentent une convention pour décrire le comportement qualitatif lorsque l'argument tend vers zéro. En général dans les calculs, seul le terme dominant est préservé, par exemple :

$$\begin{array}{rcl}
o(h) + o(h) & = & o(h) \\
o(h) + O(h) & = & O(h) \\
O(h) + O(h^2) & = & O(h) \\
o(h) + O(h^2) & = & o(h) \\
h^p \cdot O(h) & = & O(h^{p+1}), \quad p > 0 \\
h^p \cdot o(h) & = & o(h^{p+1}), \quad p > 0 \\
O(h^2) + O(h^3) + h \cdot o(h) & = & O(h^2) \\
o(h) \cdot o(h) & = & o(h^2) \\
O(h) \cdot o(h) & = & o(h^2) \\
O(O(h)) & = & O(h) \\
o(O(h)) & = & o(h) \\
O(o(h)) & = & o(h) \\
o(o(h)) & = & o(h)
\end{array}$$

Ces "identités" signifient : "la somme de deux fonctions qui sont $o(h)$ est $o(h)$", la somme d'une fonction qui $o(h)$ et d'une qui est $O(h)$ est $o(h)$" etc. Si f est dérivable en a nous pouvons caractériser l'écart entre f et sa tangente en a par le résultat suivant :

Théorème 5.1. - *Développement limité du premier ordre.* *$f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in D$ si et seulement si*

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \tag{5.3}$$

pour tout $a + h \in D$.

Démonstration. Si f est dérivable, il suit de (5.1) que

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h) - f(a) - f'(a)h}{h}$$

d'où par la définition de $o(h)$: $f(a+h)-f(a)-f'(a)h = o(h)$. Si f vérifie (5.3), alors par la définition de $o(h)$:

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}$$

d'où (5.1). □

Définition. Soit $D = I$ un intervalle. On dit que la fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I si elle est dérivable en tout $a \in D$. La fonction f' définie sur I est appelée la fonction dérivée de f.

Corollaire. Une fonction dérivable sur I est continue sur I.

Notation. On note aussi la dérivée $f'(x)$ par $\frac{d\,f(x)}{d\,x}$ ou encore par $\frac{d}{d\,x}f(x)$. En particulier, la dernière notation symbolise que dériver une fonction f est une opération sur f dont le résultat est une fonction f', la dérivée de f. On peut comparer l'action de $\frac{d}{d\,x}$ sur une fonction avec celle d'une matrice sur un vecteur. La dérivée en un point $a \in D$ est notée par $f'(a)$ ou par $\frac{d\,f(x)}{d\,x}\Big|_{x=a}$ ou encore par $\frac{d}{d\,x}\Big|_{x=a} f(x)$. Si la variable x représente le temps on note aussi la dérivée $f'(x)$ par $\dot{f}(x)$.

Exemples - calculer la dérivée à l'aide de la définition.

1. Les fonctions constantes, i.e. $f(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ont pour dérivée $f'(x) = 0$.
2. La fonction identité $f(x) = x$ est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = 1$.
3. Soit $f(x) = x^2$. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x,\end{aligned}$$

   c.-à.-d. $f'(x) = 2x$. Notons que $(x+h)^2 - x^2 - 2xh = h^2$, donc $o(h) = h^2$.
4. Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Pour tout $x > 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

   car $x \mapsto \sqrt{x}$ est une fonction continue. Soit $x = 1$. On peut écrire

$$\sqrt{1+h} = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}} h + o(h) \approx 1 + \frac{h}{2}$$

   En première approximation $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$. Son erreur est plus petite que 10^{-3} si $|h| < 0.087$ et $\frac{\sqrt{1+h}}{1+h/2} < 10^{-3}$ si $|h| < 0.093$.

5. Soit $f(x) = e^x$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction e^x est dérivable et $f'(x) = e^x$ car

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{1 + h + r_2(h) - 1}{h} = e^x$$

puisque $r_2(h)/h$ converge vers 0 lorsque h tend vers 0.

6. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d \sin x}{d x} = \cos x, \quad \frac{d \cos x}{d x} = -\sin x.$$

En utilisant $\sin y - \sin x = 2 \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} \cdot \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right) \\ &= \cos x \end{aligned}$$

car $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ et $\cos x$ est continue. Pour calculer la dérivée du cosinus, on utilise l'identité $\cos y - \cos x = -2 \sin\left(\frac{y-x}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$ et la continuité de la fonction sin.

5.1.1 Propriétés de la dérivée

Théorème 5.2. - *Règles du calcul différentiel.* *Soit $f, g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $a \in D$. Alors*

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a) \quad \text{pour } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{(linéarité)} \tag{5.4}$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \quad \text{(règle du produit)} \tag{5.5}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)} \quad \text{si } g(a) \neq 0 \quad \text{(règle du quotient)} \tag{5.6}$$

Démonstration. On utilise soit le quotient (5.1) de la définition soit le développement limité du premier ordre (5.3). On a $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h)$ et $g(a+h) = g(a) + g'(a)h + o(h)$ pour $a + h \in D$. Il en suit la linéarité de la dérivée (5.4). Pour la règle du produit (5.5) notons que

$$\begin{aligned} f(a+h)g(a+h) &= \big(f(a) + f'(a)h + o(h)\big) \cdot \big(g(a) + g'(a)h + o(h)\big) \\ &= f(a)g(a) + \big(f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\big)h + o(h) \end{aligned}$$

en appliquant les conventions pour les $o(h)$. Il en suit que le produit fg admet un développement limité du premier ordre en $a \in D$. Le terme linéaire en h donne la dérivée de fg en $a \in D$ d'où (5.5). La démonstration de la règle du quotient (5.6) est laissée comme exercice. □

Exemples.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d\,x^n}{d\,x} = nx^{n-1}$$

Par récurrence et la règle du produit

$$\frac{d\,x^n}{d\,x} = \frac{d\,x \cdot x^{n-1}}{d\,x} = x\frac{d\,x^{n-1}}{d\,x} + x^{n-1}\frac{d\,x}{d\,x} = (n-1)x \cdot x^{n-2} + x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

2. Par la règle du quotient on a

$$(e^{-x})' = \left(\frac{1}{e^x}\right)' = -\frac{e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}.$$

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d\,\sinh x}{d\,x} = \cosh x, \quad \frac{d\,\cosh x}{d\,x} = \sinh x.$$

Par la linéarité de la dérivée on a

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' - (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \cosh x.$$

et

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{(e^x)' + (e^{-x})'}{2} = \frac{e^x + (-e^{-x})}{2} = \sinh x$$

4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{d\,\tanh x}{d\,x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

Par la définition de tanh et la règle du quotient

$$\begin{aligned}(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' &= \frac{(\sinh x)'\cosh x - \sinh x(\cosh x)'}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.\end{aligned}$$

Théorème 5.3. - *Règle de composition.* *Si $f : D \to T$ et $g : T \to B$ sont dérivables respectivement en $a \in D$ et $b = f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a) \tag{5.7}$$

Remarque. On écrit aussi

$$\left.\frac{d\,g(f(x))}{d\,x}\right|_{x=a} = \left.\frac{d\,g(y)}{d\,y}\right|_{y=f(a)} \cdot \left.\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right|_{x=a}$$

ou encore brièvement $(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$.

Démonstration. Appliquer le développement limité du premier ordre à $g(f(a+h))$. Exercice. □

Corollaire 5.4. ***- dérivée de la fonction réciproque.*** *Soit f inversible, continue et dérivable en a. Si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et*

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \tag{5.8}$$

ou en faisant la substitution $b = f(a)$

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \tag{5.9}$$

Remarque. On écrit aussi

$$\left.\frac{d\,f^{-1}(y)}{d\,y}\right|_{y=f(a)} = \frac{1}{\left.\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right|_{x=a}}$$

ou

$$\left.\frac{d\,f^{-1}(y)}{d\,y}\right|_{y=b} = \frac{1}{\left.\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right|_{x=f^{-1}(b)}}$$

Démonstration du Corollaire. On applique la règle de composition à l'identité $f^{-1}(f(x)) = x$.

Exemples.

1. Pour calculer la dérivée de $h(x) = (3x^2 + 5x + 2)^n$, on applique la règle de composition pour $f(x) = 3x^2 + 5x + 2$ et $g(y) = y^n$. Avec $f'(x) = 6x + 5$ et $g'(y) = ny^{n-1}$ on obtient

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left.\frac{d\,g(y)}{d\,y}\right|_{y=f(x)} \cdot \frac{d\,f(x)}{d\,x} \\ &= n f(x)^{n-1} f'(x) \\ &= n(6x+5)(3x^2+5x+2)^{n-1}. \end{aligned}$$

2. Montrer que $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En utilisant la formule pour la dérivée de la fonction réciproque nous avons

$$\frac{d\,\ln y}{d\,y} = \frac{1}{\left.\frac{d\,e^x}{d\,x}\right|_{x=\ln y}} = \frac{1}{\left.e^x\right|_{x=\ln y}} = \frac{1}{e^{\ln y}} = \frac{1}{y}.$$

3. **La dérivée logarithmique d'une fonction**. Soit $f(x) > 0$ une fonction dérivable. La dérivée
$$\frac{d\,\ln(f(x))}{d\,x} = \left.\frac{d\,\ln y}{d\,y}\right|_{y=f(x)} \cdot \frac{d\,f(x)}{d\,x} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$
est appelée la dérivée logarithmique de $f(x)$.
4. Soit g une fonction dérivable et $\lambda \neq 0$ une constante réelle. On considère la fonction g_λ définie par $g_\lambda(x) = g(\lambda x)$. La dérivée de g_λ est donnée par (appliquer la règle de composition avec $g = g$ et $f(x) = \lambda x$)
$$\frac{d\,g_\lambda(x)}{d\,x} = \frac{d\,g(\lambda x)}{d\,x} = \lambda g'(\lambda x)$$
En particulier, pour $\lambda = -1$, on a
$$\frac{d\,g(-x)}{d\,x} = -g'(-x).$$
Par exemple, $\frac{d\,e^{-x}}{d\,x} = -e^{-x}$.
5. On calcule la dérivée de la fonction arcsin $:]-1,1[\to]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
$$\begin{aligned}\frac{d\,\arcsin y}{d\,y} &= \frac{1}{\left.\frac{d\,\sin x}{d\,x}\right|_{x=\arcsin y}} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin y)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.\end{aligned}$$

5.1.2 Dérivée unilatérale

Dérivée à droite. Une fonction $f : D \to T$ est dite *dérivable à droite* en $a \in D$ si la limite
$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
existe. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée la *dérivée à droite* de la fonction f au point a.

Dérivée à gauche. Une fonction $f : D \to T$ est dite *dérivable à gauche* en $a \in D$ si la limite
$$\lim_{x\to a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
existe. Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelée la *dérivée à gauche* de la fonction f au point a.

Dérivée et dérivées unilatérales en un point intérieur du domaine. Une fonction $f : D \to T$ est dérivable en $a \in \overset{\circ}{D}$ si et seulement si sa dérivée à droite et sa dérivée à gauche existent et sont égales.

Exemple. La fonction $\text{abs}(x) = |x|$ est dérivable en tout $a \neq 0$ et $\text{abs}'(a) = \text{sign}(a)$. En $a = 0$ les dérivées unilatérales existent : sa dérivée à droite est $+1$ et sa dérivée à gauche est -1. Donc $\text{abs}(x)$ n'est pas dérivable en $a = 0$.

5.1.3 Dérivée et comportement local

Le développement limité du premier ordre (voir l'équation (5.3)) permet d'analyser le comportement d'une fonction $f : D \to T$ dans le voisinage d'un point intérieur a si $f'(a) \neq 0$:

Théorème 5.5. ***- transversalité si $f'(a) \neq 0$.*** *Soit $f : D \to T$ dérivable en $a \in \overset{\circ}{D}$ tel que $f'(a) \neq 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que la fonction $h \mapsto f(a+h) - f(a)$ change de signe en $h = 0$ et $f(a+h) - f(a) \neq 0$ si $h \in]-\delta, \delta[$ et $h \neq 0$. Plus précisement, si $f'(a) > 0$, alors*

$$\begin{array}{lcl} f(a+h) - f(a) & > & 0\, si \quad 0 < h < \delta \\ f(a+h) - f(a) & < & 0\, si - \delta < h < 0 \end{array}$$

Démonstration. L'hypothèse $a \in \overset{\circ}{D}$ implique qu'il y a un voisinage $]a-r, a+r[\subset D$. Par l'équation (5.3) $f(a+h) - f(a) - f'(a)h = o(h)$. Par la définition de $o(h)$, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|o(h)| < \epsilon|h|$ si $|h| < \delta$. En particulier, pour $\epsilon = |f'(a)|$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(a+h) - f(a) - f'(a)h| = |o(h)| < |f'(a)||h|$ pour tout $|h| < \delta$. Donc $f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(h) \neq 0$. $\square$

5.1.4 Une application de la dérivée : la règle de l'Hospital

L'expression indéterminée 0/0. Soit g, f deux fonctions réelles telles que $f(x), g(x) \to 0$ lorsque x tend vers a. Alors la limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ est indéterminée. On peut évaluer cette limite si f, g sont dérivables en a et si $g'(a) \neq 0$:

Théorème 5.6. ***- Règle de l'Hospital I.*** *Soit $g, f : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en a telles que $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que $g(a+h) \neq 0$ pour tout h tel que $|h| < \delta$ et*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Démonstration. Par définition de la dérivée

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) = f'(a)h + o(h)$$

$$g(a+h) = g(a) + g'(a)h + o(h) = g'(a)h + o(h)$$

pour tout $a + h \in D$. Par le théorème 5.5, $g(a+h) = g'(a)h + o(h) \neq 0$. Alors

$$\frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{f'(a)h + o(h)}{g'(a)h + o(h)} \to \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

lorsque h tend vers zéro. $\square$

Exemples.

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{2x+\sin x}{e^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2+\cos x}{e^x} = 3$$

car les dérivées des fonctions sont continues.

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{2+2\tan^2 2x}{1+\tan^2 x} = 2.$$

5.1.5 La classe $C^1(I)$

Définition. Soit I un intervalle ouvert. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $C^1(I)$ si f est dérivable sur I et sa dérivée f' est continue sur I.

Remarque. Par définition on pose $C^0(I)$ l'ensemble (ou la classe) des fonctions continues sur I. Donc une fonction f est de classe $C^1(I)$ si f est dérivable sur I avec f' de classe $C^0(I)$. Evidemment, $C^1(I) \subset C^0(I)$.

Remarque. Il existe des fonctions dérivables sur I avec dérivées non-continues sur I. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec sa dérivée donnée par

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La dérivée f' n'est pas continue en $x = 0$.

5.1.6 Supplément : la dérivée de fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$

Fonction dérivable. Soit $D \subset \mathbb{R}$, $a \in D$ un point limite de D et $f = u + iv : D \longrightarrow \mathbb{C}$ avec $u, v : D \longrightarrow \mathbb{R}$. La fonction f est dite *dérivable* en $a \in D$ si les fonctions réelles u et v sont dérivables en $a \in D$. Dans ce cas la *dérivée* de la fonction f au point a, notée $f'(a)$, est donnée par

$$f'(a) = u'(a) + iv'(a).$$

Exemple. Soit p un réel. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(x) = e^{ipx}$ est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = ipe^{ipx}$. En fait en utilisant $f(x) = \cos(px) + i\sin(px)$ on trouve

$$f'(x) = -p\sin(px) + ip\cos(px) = ip\big(i\sin(px) + \cos(px)\big).$$

5.2 Théorèmes des accroissements finis

5.2.1 Extremums locaux et théorème de Rolle

Fonction monotone et la dérivée. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in\in \overset{\circ}{D}$. Si f est croissante dans un voisinage $B_\epsilon(a)$ alors $f'(a) \geq 0$. Si f est décroissante dans un voisinage $B_\epsilon(a)$ alors $f'(a) \leq 0$. C'est une conséquence du fait qu'une fonction f est croissante (respectivement décroissante) si et seulement si pour tout couple (x_1, x_2) on a $(f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) \geq 0$ (respectivement $(f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) \leq 0$).

Comportement si $f'(a) \neq 0$. Si $f'(a) > 0$, par le théorème 5.5 il existe un voisinage $B_\epsilon(a)$ tel que $x < a$ implique $f(x) < f(a)$ et $x > a$ implique $f(x) > f(a)$ (la courbe $y = f(x)$ traverse la droite $y = f(a)$ en $x = a$). Si $f'(a) \neq 0$ on ne peut pas en déduire la monotonie dans un voisinage de a. Par exemple, considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x + x^2 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Elle est dérivable en $x = 0$ avec $f'(0) = 1$, mais elle n'est monotone sur aucun voisinage de 0.

Point stationnaire. On dit que $a \in D$ est un *point stationnaire* de la fonction $f : D \to T$ si $f'(a) = 0$.

Extremums locaux. On dit que la fonction $f : D \to T$ admet un *minimum local* en $a \in\in \overset{\circ}{D}$ s'il existe un voisinage $B_\delta(a)$ tel que $x \in B_\delta(a) \cap D$ implique $f(a) \leq f(x)$. On dit que la fonction $f : D \to T$ admet un *maximum local* en $a \in\in \overset{\circ}{D}$ s'il existe un voisinage $B_\delta(a)$ tel que $x \in B_\delta(a) \cap D$ implique $f(a) \geq f(x)$. Le minimum (respectivement le maximum) est appelé strict si l'inégalité est stricte dans $B_\delta(a) \setminus \{a\}$.

Théorème 5.7. - *Condition nécessaire pour extremums locaux.* *Soit $a \in \overset{\circ}{D}$ (l'intérieur de D) un maximum (ou minimum) local de $f : D \to \mathbb{R}$ et soit f dérivable en a. Alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. La fonction (qui donne la pente des secantes et de la tangente définie par l'équation 5.2)

$$\widetilde{m}_a(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \in D \setminus \{a\}, \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue en $x = a$ et change de signe en a puisque si f admet un extremum local en a l'expression $f(x) - f(a)$ ne change pas de signe mais évidemment $x - a$ change de signe. La continuité de $\widetilde{m}_a$ (puisque f est dérivable en a) implique $f'(a) = \widetilde{m}_a(a) = 0$. $\square$

Remarque. Le théorème donne une condition nécessaire mais non suffisante pour un extremun local d'une fonction dérivable. Par exemple, la fonction $f(x) = x^3$ admet un point stationnaire en $x = 0$ qui n'est pas un extremum local.

Fonction continue et dérivable. Le fait qu'une fonction continue définie sur un intervalle borné et fermé $[a, b]$ admet son minimum (et son maximum) permet de distinguer les alternatives suivantes :

1. Le minimum se trouve en a ou en b.
2. Le minimum est un point stationnaire de f.
3. Le minimum est un point où f' n'existe pas.

Par ces trois alternatives, nous avons en particulier le résultat suivant :

Théorème 5.8. - *(théorème de Rolle*[1]*).* *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors la fonction f admet au moins un point stationnaire dans $]a, b[$.*

Démonstration. La fonction continue f atteint son minimum et son maximum sur $[a, b]$. Par l'hypothèse que f est dérivable, la troisième alternative est exclue. Si f admet le minimum et le maximum sur le bord de l'intervalle, la condition $f(a) = f(b)$ (ce qui veut dire que le minimum de f est égal au maximum de f) implique que f est constante. Donc $f'(x) = 0$ en tout $x \in [a, b]$. Il reste le cas où un extremum se trouve en un point intérieur c de l'intervalle, d'où $f'(c) = 0$ par le théorème 5.7. □

5.2.2 Théorèmes des accroissements finis

Théorème 5.9. *Théorème des accroissements finis de Lagrange*[2]*).* *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ pour lequel on a*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Démonstration. La fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

satisfait les conditions du théorème de Rolle. Alors il existe un point stationnaire $c \in]a, b[$ de g. Donc

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Le théorème des accroissements finis nous permet de conclure sur la monotonie d'une fonction à partir de sa dérivée.

Corollaire 5.10. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$ et $f'(x) \geq 0$ (respectivement $f'(x) > 0$), alors f est croissante (respectivement strictement*

1. D'après Michel Rolle (1652 - 1719), un mathématicien français.
2. D'après Giuseppe Lodovico de Lagrangia) (1736 - 1813), en français : Joseph Louis, comte de Lagrange, un mathématicien italien.

croissante) sur $[a, b]$. *Si* $f'(x) \leq 0$ *(respectivement* $f'(x) < 0$*), alors* f *est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur* $[a, b]$.

Démonstration. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x, y \in [a, b]$ et $x < y$ il existe $c = c(x, y) \in]x, y[$ tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$. □

Avec le résultat que pour une fonction monotone la dérivée a un signe, ce corollaire implique le

Corollaire 5.11. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue, dérivable sur* $]a, b[$. *Alors*

1. $f'(x) \geq 0$ *si et seulement si* f *est croissante.*
2. $f'(x) \leq 0$ *si et seulement si* f *est décroissante.*

Les corollaires suivants jouent un rôle important dans la théorie des équations différentielles.

Corollaire 5.12. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continue, dérivable sur* $]a, b[$ *et* $f'(x) = 0$. *Alors* f *est constante sur* $[a, b]$.

Démonstration. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in [a, b]$ il existe $c = c(x) \in]a, x[$ tel que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0$, i.e. $f(x) = f(a)$. □

Remarque. Par conséquent, une fonction continue et dérivable est constante si et seulement si $f'(x) = 0$. Il en suit le résultat suivant :

Corollaire 5.13. *Soit* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues, dérivables sur* $]a, b[$ *et* $f'(x) = g'(x)$. *Alors il existe une constante réelle* c *telle que* $f(x) = g(x) + c$.

Théorème 5.14. ***Théorème des accroissements finis de Cauchy.*** *Soit* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *deux fonctions continues, dérivables sur* $]a, b[$ *et* $g'(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in]a, b[$. *Alors il existe au moins un point* $c \in]a, b[$ *pour lequel on a*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Démonstration. La fonction $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

satisfait les conditions du théorème de Rolle. Alors il existe un point sationnaire $c \in]a, b[$ de h. Donc

$$0 = h'(c) = f'(c)) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c).$$

Ce théorème permet de formuler une généralisation de la règle de l'Hospital. □

Théorème 5.15. ***- Règle de l'Hospital II.*** *Soit* $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables et* $g(x), g'(x) \neq 0$ *pour tout* $x \in]a, b[$. *De plus, on suppose que*

1. $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} g(x) = l$ *avec* $l = 0, -\infty$ *ou* $+\infty$,

2. $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = r$ *avec* $r \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Alors

$$\lim_{x\to a+} \frac{f(x)}{g(x)} = r.$$

Remarque. Cette règle reste valable si x tend vers $b-$, vers a, ou vers $\pm\infty$.

Exemples. Il est important de vérifier qu'en effet $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe pour pouvoir appliquer la règle de l'Hospital. Cependant, souvent on applique formellement la règle de l'Hospital et si on arrive à calculer $\lim_{x\to a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, la validité de la règle de l'Hospital est justifiée a posteriori.

1.
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

2.
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

3. Pour calculer $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\tan(3x)}{\tan(x)}$, noter d'abord que par la règle de l'Hospital

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\cos(x)}{\cos(3x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\sin(x)}{3\sin(3x)} = -\frac{1}{3}$$

car $\sin\frac{\pi}{2} = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1$ et le sinus est une fonction continue. Par conséquent,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\tan(3x)}{\tan(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\sin(3x)}{\sin(x)} \frac{\cos(x)}{\cos(3x)} = (-1)\cdot(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}.$$

Si on applique directement la règle de l'Hospital, on a

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\tan(3x)}{\tan(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{3\cos^{-2}(3x)}{\cos^{-2}(x)} = 3\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\cos(x)}{\cos(3x)}\right)^2 = 3\cdot\frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

en utilisant le résultat que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \frac{\cos(x)}{\cos(3x)} = \frac{1}{3}$.

Autres expressions indéterminées. Pour calculer d'autres expressions indéterminées avec la règle de l'Hospital, on les transforme selon les méthodes suivantes :

1. Expression "$0\cdot\infty$" : calculer $\lim_{x\to a+} f(x)g(x)$ si $\lim_{x\to a+} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to a+} g(x) = \infty$. On écrit soit $f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ ("0/0") soit $f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ ("∞/∞"). Par exemple,

$$\lim_{x\to 0+} x\ln x = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+} (-x) = 0.$$

2. Expression "$\infty - \infty$" : calculer $\lim_{x\to a+} f(x) - g(x)$ si $\lim_{x\to a+} f(x) = \infty$ et $\lim_{x\to a+} g(x) = \infty$. On écrit

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}} \quad (\text{"}0/0\text{"}).$$

Par exemple, pour tout $a \geq 0$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x+ax^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{x+ax^2-\sin x}{(x+ax^2)\sin x} = \lim_{x\to 0+} \frac{1+2ax-\cos x}{(1+2ax)\sin x + (x+ax^2)\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{2a + \frac{1-\cos x}{x}}{\frac{\sin x}{x} + 2a\sin x + (1+ax)\cos x} = \frac{2a}{2} = a.$$

5.3 Dérivées d'ordre supérieur

Définition. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si la fonction dérivée $f' : I \to \mathbb{R}$ est elle-même dérivable sur I, sa fonction dérivée est appelée *dérivée seconde* de f et on la note f''. Plus généralement, les dérivées successives de f, si elles existent, sont notées en exposant par des traits obliques ou par un entier naturel placé entre parenthèses :

$$\begin{gathered} f(x) = f^{(0)}(x), \\ f'(x) = f^{(1)}(x), \\ f''(x) = f^{(2)}(x), \\ \cdots \\ (f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x). \end{gathered}$$

La fonction $f^{(n)}$ est appelée la $n^{\text{ième}}$ dérivée de f. On note aussi

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{d\,x^n} = \frac{d^n}{d\,x^n} f(x).$$

Exemples.

1. Soit m un entier naturel et $f(x) = x^m$. Pour tout entier naturel n, on a

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{d^n}{d\,x^n} x^m = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} & \text{si } n \leq m, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

2. Soit $f(x) = e^{\lambda x}$. Pour tout entier naturel n, on a

$$\frac{d^n}{d\,x^n} e^{\lambda x} = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

3. Soit $f(x) = \sin x$. On a

$$\frac{d\ \sin x}{d\,x} = \cos x\ , \qquad \frac{d^2\ \sin x}{d\,x^2} = -\sin x$$

$$\frac{d^3\ \sin x}{d\,x^3} = -\cos x\ , \qquad \frac{d^4\ \sin x}{d\,x^4} = \sin x.$$

et par conséquent, pour tout entier naturel n :

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^m \cos x & \text{si } n = 2m+1, \\ (-1)^m \sin x & \text{si } n = 2m. \end{cases}$$

4. Quelques fonctions spéciales sont définies par des dérivées d'ordre supérieur d'une fonction élémentaire. Par exemple, pour $n \in \mathbb{N}$ soit

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{5.10}$$

les *polynômes d'Hermite*. On trouve :

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x. \end{aligned}$$

5.3.1 La classe $C^n(I)$

Définition. Soit I un intervalle ouvert. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $C^n(I)$ si f est n fois dérivable sur I et sa $n^{\text{ième}}$ dérivée $f^{(n)}$ est continue sur I. On désigne $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions dont toutes les dérivées successives sont continues.

Remarque. L'ensemble $C^n(I)$ est un espace vectoriel car si $f, g \in C^n(I)$ alors $\alpha f + \beta g \in C^n(I)$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a les inclusions suivantes :

$$C^\infty(I) \subset C^{n+1}(I) \subset C^n(I) \subset \cdots \subset C^1(I) \subset C^0(I).$$

5.3.2 La formule de Leibniz

La formule de Leibniz. Soit $f, g \in C^n(I)$. Alors $fg \in C^n(I)$ et

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

pour tout $x \in I$.

Démonstration. On démontre la formule de Leibniz par récurrence. Pour $n = 1$ on a la règle du produit (5.2). On peut supposer que la formule est vraie pour un n. Alors

$$
\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{d\,x}(fg)^{(n)}(x) = \frac{d}{d\,x}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)\right) \quad \text{par 5.1 et 5.2} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(f^{(k+1)}(x)g^{(n+1-k-1)}(x) + f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1} f^{(j)}(x)g^{(n+1-j)}(x) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x)
\end{aligned}
$$

où pour la dernière ligne on utilise le triangle de Pascal pour les coefficients binominaux :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

$\square$

Application aux polynômes d'Hermite. On peut également montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $H_n'(x) = 2xH_n(x) - H_{n+1}(x)$ et pour tout n entier positif : $H_n'(x) = 2nH_{n+1}(x)$. Pour la première récurrence, noter que

$$
\begin{aligned}
H_n'(x) &= (-1)^n \frac{d}{dx}\big(e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2}\big) = 2xH_n(x) + (-1)^n e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\, e^{-x^2} \\
&= 2xH_n(x) - H_{n+1}(x).
\end{aligned}
$$

Pour la deuxième, on utilise cette identité pour trouver

$$
\begin{aligned}
H_n'(x) &= 2xH_n(x) + (-1)^n e^{x^2}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\, e^{-x^2} \\
&= 2xH_n(x) + (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}(-2x\, e^{-x^2})
\end{aligned}
$$

d'où par la formule de Leibniz :

$$
\begin{aligned}
H_n'(x) &= 2xH_n(x) - 2xH_n(x) - (-1)^n e^{x^2} 2n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}e^{-x^2} \\
&= 2nH_{n-1}(x).
\end{aligned}
$$

5.3.3 Fonction convexe et dérivée seconde

Définition - fonction convexe. Soit I un intervalle. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite convexe sur I si pour tout couple x_1, x_2 dans I et tout $t \in [0,1]$:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

La fonction f est dite strictement convexe si pour tout couple $x_1 \neq x_2$ dans I et tout $t \in]0,1[$:

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) < tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

Une fonction f est dite (strictement) concave si $-f$ est (strictement) convexe.

Inégalité de Jensen. Soit I un intervalle. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe sur I si et seulement si pour tout n-tuple $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de I et tout n-tuple $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ vérifiant $\sum_{k=1}^n t_k = 1$, on a

$$f(\sum_{k=1}^n t_k x_k) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k)$$

On peut démontrer l'inégalité de Jensen par une simple récurrence. Ci-dessous nous présentons une démonstration sous l'hypothèse que f est dérivable sur I.

Proposition 5.3.1. *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Alors f est convexe si et seulement si $f'(x)$ est une fonction croissante sur I.*

Démonstration. On peut supposer que $x_1 \leq x_2$. Alors pour tout $t \in]0,1[$ on a $x_1 \leq tx_1 + (1-t)x_2 \leq x_2$.

1. Soit f convexe et dérivable. Alors

$$f'(x_1) = \lim_{\substack{t \to 1 \\ t \neq 1}} \frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)}{(1-t)(x_2 - x_1)} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

et

$$f'(x_2) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_2)}{-t(x_2 - x_1)} \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Donc

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

2. Soit f' croissante et $x_1 < x_2$. Par le théorème des accroissements finis de Lagrange pour tout $t \in]0,1[$ il existe c_1, c_2 tels que $x_1 \leq c_1 \leq tx_1 + (1-t)x_2 \leq c_2 \leq x_2$ et

$$\frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)}{(1-t)(x_2 - x_1)} = f'(c_1) \leq f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2)}{t(x_2 - x_1)}.$$

Donc

$$t(f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)) \leq (1-t)(f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2)),$$

c'est-à-dire f est convexe.

□

Conséquence - inégalités pour des fonction convexes et dérivables. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable sur I. Alors pour tout $x, y \in I$, on a

$$f'(x)(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq f'(y)(y-x).$$

Si f est strictement convexe, les inégalités sont strictes si $x \neq y$.

Application - inégalité de Jensen. Nous utilisons la seconde inégalité pour démontrer l'inégalité de Jensen si f est une fonction convexe dérivable. On pose $y = \sum_{k=1}^n t_k x_k$. Evidemment $y \in I$. Pour tout $x_k \in I$, on a

$$f(y) - f(x_k) \leq f'(y)(y - x_k).$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n t_k(f(y) - f(x_k)) \leq \sum_{k=1}^n t_k f'(y)(y - x_k).$$

En utilisant $1 = \sum_{k=1}^n t_k$ et $y = \sum_{k=1}^n t_k x_k$ cette inégalité s'écrit

$$f(y) - \sum_{k=1}^n t_k f(x_k) \leq 0.$$

Corollaire 5.16. *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. Alors*

1. *f est convexe si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*
2. *Si $f''(x) > 0$ tout $x \in I$, alors f est strictement convexe sur I.*

Démonstration. La fonction dérivée $f'(x)$ est croissante si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. Si $f'(x) > 0$, alors $f'(x)$ est strictement croissante sur I d'où on conclut que f est strictement convexe sur I. $\square$

Exemple. La fonction $f(x) = x^2$ satisfait $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$. Par conséquent, $f(x) = x^2$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$. L'inégalité de Jensen s'écrit pour $x_k \in \mathbb{R}$ comme suit :

$$\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n t_k x_k^2.$$

En posant $t_k = \frac{1}{n}$ on obtient

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k^2$$

Exemple. La fonction $f(x) = \ln x$ est de classe $C^\infty(\mathbb{R}_+)$. On a $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Par conséquent, $f(x) = \ln x$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+$. L'inégalité de Jensen s'écrit pour $x_k > 0$ comme suit :

$$\ln\Big(\sum_{k=1}^n t_k x_k\Big) \geq \sum_{k=1}^n t_k \ln(x_k).$$

En posant $t_k = \frac{1}{n}$, on obtient

$$\ln\big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\big) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(x_k).$$

En prenant l'exponentielle des deux membres de cette inégalité, on trouve l'inégalité entre la moyennne géométrique et la moyenne arithmétique :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \geq \prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}}.$$

5.3.4 Extremums locaux et dérivée seconde

Introduction. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Supposons que $x_0 \in I$ soit un point stationnaire de f, i.e. $f'(x_0) = 0$. Le point stationnaire x_0 est un minimum local de f si dans un voisinage de x_0 la fonction f est strictement décroissante pour $x < x_0$ et strictement croissante pour $x > x_0$. Par conséquent, si dans un voisinage de x_0 la fonction dérivée f' satisfait

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 \quad & \text{si } x < x_0 \\ f'(x) > 0 \quad & \text{si } x > x_0 \end{aligned}$$

alors la fonction f admet un minimum local en x_0.

Comportement si $f''(x_0) > 0$. Soit $f'(x_0) = 0$. Si $f''(x_0) > 0$, il existe un voisinage $V_\epsilon(x_0)$ tel que $x < x_0$ implique $f'(x) < 0$ et $x > x_0$ implique $f'(x) > 0$. Par conséquent, nous avons le résultat suivant :

Théorème 5.17. ***Critère de la dérivée seconde.*** *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Soit x_0 un point stationnaire de f et supposons que la dérivée seconde de f existe en x_0. Si $f''(x_0) > 0 (< 0)$, alors la fonction f admet un minimum (maximum) local strict en x_0.*

Corollaire 5.18. *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction (strictement) convexe/concave et dérivable sur I. Soit x_0 un point stationnaire de f. Alors la fonction f atteint son mininum /maximum (strict) en x_0.*

Remarque. En particulier, si la dérivée seconde de f existe sur I et $f''(x) \geq 0 / \leq 0$ pour tout $x \in I$, la fonction f satisfait les hypothèses du corollaire.

5.3.5 Applications

1. **Inégalité de Bernoulli.** Soit $p > 1$. Montrer que pour tout $x > -1$ on a l'inégalité
$$(1 + x)^p \geq 1 + px$$
avec l'inégalité stricte si $x \neq 0$.
2. **Inégalité de Young.** Soit $p > 1$ et q défini par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Montrer que pour tout couple $x, y \geq 0$ on a l'inégalité
$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$
avec l'inégalité stricte si $x^{p-1} \neq y$.

3. **Méthode des moindres carrés.** Soit $a_k \in \mathbb{R}$ pour $k = 1, \ldots, n$. Quelle valeur de x minimise la fonction

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2 \quad ?$$

Par exemple, les a_k représentent les résultats de n mesures d'une quantité. La tâche est d'approcher au mieux la valeur a de cette quantité.

5.3.6 Points d'inflexion et dérivée seconde

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. On dit que f admet un point d'inflexion en a si le graphe de f traverse sa tangente au point $(a, f(a))$, c'est-à-dire que $f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ change de signe en $x = a$.

Proposition (Critère du point d'inflexion). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $a \in I$. Alors f admet un point d'inflexion en a si et seulement s'il existe un voisinage $B_\delta(a)$ tel que pour tout $x \in B_\delta(a) \setminus \{a\}$:

$$f'(a) < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou bien} \quad f'(a) > \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Proposition (condition nécessaire). Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(I)$. Si f admet un point d'inflexion en a, alors $f''(a) = 0$.

Proposition (condition suffisante). Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2(I)$. S'il existe un voisinage $V_\delta(a)$ tel que pour tout $x \in V_\delta(a) \setminus \{a\}$:

$$(x - a)f''(x) < 0 \quad \text{ou bien} \quad (x - a)f''(x) > 0$$

alors f admet un point d'inflexion en a. En particulier, si f est trois fois dérivable en a et $f'''(a) \neq 0$, alors f admet un point d'inflexion en a.

Exemple. La fonction $\tanh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un point d'inflexion en $a = 0$:

$$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x \ ,$$

$$(\tanh x)'' = \frac{-2 \sinh x}{\cosh^3 x} = -2 \tanh x (1 - \tanh^2 x).$$

Donc $(\tanh x)'' = 0$ si $x = 0$ (condition nécessaire) et

$$\frac{d^3 \ \tanh x}{d\, x^3}\Big|_{x=0} = -2 \neq 0$$

implique que ce point satisfait aussi la condition suffisante.

5.4 Dérivées d'ordre supérieur et développements en séries

Introduction. Nous avons démontré en 5.1 qu'une fonction $f : I \to T$ dérivable en $a \in I$ peut être approchée par un polynôme de degré 1 dans un voisinage de a. Plus précisement, soit $P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$, alors

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \frac{R_1(x)}{x-a} = 0$$

que nous avons aussi noté comme $f(x) = P_1(x) + o(x-a)$. Ces expressions sont appelées le développement limité du premier ordre de la fonction f autour du point a. Nous allons étendre ce concept aux fonctions n-fois dérivables et démontrer que, sous des hypothèses convenables pour tout $m \leq n$, nous pouvons écrire

$$f(x) = P_m(x) + R_m(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \frac{R_m(x)}{(x-a)^m} = 0$$

où $P_m(x)$ est un polynôme de degré m. Cette expression $P_m(x) + R_m(x)$ avec $R_m(x) = o((x-a))^m$ (ou mieux) est appelée développement limité d'ordre m.

5.4.1 Fonctions polynomiales

Fonction polynomiale générale. Soit f le polynôme de degré n donné par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k, \quad c_n \neq 0.$$

On démontre facilement par récurrence que

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

et plus généralement

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Toute fonction polynomiale est entièrement déterminée par les valeurs de ses dérivées en un seul point a. Si f est une fonction générale dont les dérivées sont connues jusqu'à l'ordre n, nous allons montrer que cette somme est une approximation convenable de f dans un voisinage de a.

Représentation des restes $R_m(x)$. Pour un développement limité d'ordre $m < n$, on veut estimer l'erreur $R_m(x)$ dans un voisinage de a. Pour une fonction polynomiale, on peut utiliser la $(m+1)^{\text{ème}}$ dérivée de f. Si $m = 0$, il existe par le théorème des accroissements finis un $c = c_x$ entre x et a tel que

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x-a)$$

i.e. $R_0(x) = f'(c_x)(x-a)$. Pour $m \geq 1$ il nous faut une généralisation du théorème des accroissements finis pour montrer qu'il existe un $c = c_x$ entre x et a tel que

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(c_x)}{(m+1)!}(x-a)^{m+1}$$

Dans le cas d'une fonction générale f, le but est d'exprimer le reste $R_m(x)$ uniquement par la $m^{\text{ème}}$ dérivée ou, si f est même $(m+1)$-fois dérivable, par la $(m+1)^{\text{ème}}$ dérivée de f pour pouvoir estimer l'erreur du développement limité.

5.4.2 Développement limité

Polynômes de Taylor et restes de Taylor. Soit $f : I \to T$ une fonction n-fois dérivable en $a \in I$. Alors pour tout $m \leq n$, la fonction polynomiale $P_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de degré m définie par

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

est appelée le polynôme de Taylor d'ordre m de la fonction f au point a. La fonction

$$R_m(x) = f(x) - P_m(x)$$

est appelée le $m^{\text{ème}}$ reste de Taylor de f développée au point a.

Développement limité. L'expression

$$f(x) = P_m(x) + R_m(x)$$

est appelée le développement limité d'ordre m de la fonction f autour de a. On peut démontrer que le polynôme de Taylor d'ordre m est l'unique polynôme de degré m approchant la fonction f à un ordre $\geq m$.

Théorème 5.19. ***- Formule de Taylor pour le développement limité.*** *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^n(I)$. Soit $a \in I$ et m un entier naturel tel que $0 \leq m \leq n$. Alors pour tout $x \in I$, il existe $c_{x,m}$ entre a et x tel que*

$$R_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(c_{x,m})}{(m+1)!}(x-a)^{m+1} \quad \textit{si } m < n$$

et

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c_{x,n}) - f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \textit{si } m = n$$

Corollaire 5.20. *Pour tout m entier naturel tel que $0 \leq m \leq n$, on a*

$$\lim_{x \to a} \frac{R_m(x)}{(x-a)^m} = 0.$$

On écrit souvent $f(x) = P_m(x) + O((x-a)^{m+1})$ si $m < n$ respectivement $f(x) = P_n(x) + o((x-a)^n)$ si $m = n$. Rappel : $O(x^k)$ repésente une fonction avec la propriété $|O(x^k)| \leq C|x^k|$ dans un voisinage de $x = 0$ et $o(x^k)$ repésente une fonction avec la propriété $\lim\limits_{x \to 0} \frac{o(x^k)}{x^k} = 0$.

Démonstration du théorème. Le théorème est une conséquence du résultat suivant :

Théorème (théorème de Cauchy généralisé). Soit $I = [a, b]$ un intervalle et $g, h : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $C^{m+1}(I)$ telles que $g^{(k)}(a) = h^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \ldots, m$ et $h^{(m+1)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Alors pour tout $k = 0, 1, \ldots, m$, $h^{(k)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b]$ et il existe un $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{g(b)}{h(b)} = \frac{g^{(m+1)}(c)}{h^{(m+1)}(c)}.$$

Démonstration du théorème de Cauchy généralisé. Nous montrons d'abord que $h^{(k)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b]$. Supposons qu'il existe $x \in]a, b]$ tel que $h^{(m)}(x) = 0$. La $m^{\text{ième}}$ dérivée $h^{(m)}(x)$ satisfait donc les conditions du théorème de Rolle sur $[a, x]$, i.e. $h^{(m)}(x)$ est dérivable et $h^{(m)}(a) = h^{(m)}(x) = 0$. Il existe donc un $c_x \in [a, x]$ tel que

$$(h^{(m)}(c_x))' = h^{(m+1)}(c_x) = 0$$

en contradiction avec l'hypothèse $h^{(m+1)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Par récurrence, $h^{(k)}(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b]$ et tout $k = 0, 1, \ldots, m$. Par le théorème de Cauchy, il existe $c_1 \in]a, b[$ tel que

$$\frac{g(b)}{h(b)} = \frac{g(b) - g(a)}{h(b) - h(a)} = \frac{g^{(1)}(c_1)}{h^{(1)}(c_1)}.$$

Ensuite, avec $g^{(1)}(a) = h^{(1)}(a) = 0$, il existe $c_2 \in]a, c_1[$ tel que

$$\frac{g^{(1)}(c_1)}{h^{(1)}(c_1)} = \frac{g^{(2)}(c_2)}{h^{(2)}(c_2)},$$

donc

$$\frac{g(b)}{h(b)} = \frac{g^{(2)}(c_2)}{h^{(2)}(c_2)}.$$

et on obtient le théorème par récurrence.

Démonstration du théorème sur le développement limité. Soit $m < n$. Les fonctions

$$R_m(x) = f(x) - P_m(x) \quad \text{et} \quad h_m(x) = (x - a)^{m+1}$$

satisfont les conditions du théorème de Cauchy généralisé sur $I = [a, x]$. Ces fonctions sont $(m + 1)$-fois dérivables avec

$$R_m^{(m+1)}(x) = f^{(m+1)}(x) \quad \text{et} \quad h_m^{(m+1)}(x) = (m + 1)!$$

Alors il existe $c_{x,m}$ entre a et x tel que

$$\frac{R_m(x)}{h_m(x)} = \frac{f^{(m+1)}(c_{x,m})}{(m + 1)!}.$$

Si $m = n$ notons que

$$\begin{aligned} R_n(x) &= f(x) - P_n(x) \\ &= f(x) - P_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \\ &= R_{n-1}(x) - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n. \end{aligned}$$

Ensuite on applique le résultat précédent au reste $R_{n-1}(x)$.

Exemples.

1. On cherche le développement limité d'ordre 4 de la fonction $f(x) = \ln(1+x)$ autour de $a = 0$. Notons que pour tout $n \geq 1$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$$

donc $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Le polynôme de Taylor d'ordre 4 est donné par

$$P_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

Il existe un c entre 0 et x tel que

$$R_4(x) = \frac{1}{5(1+c)^5}x^5$$

Donc, pour $x \geq 0$, nous avons $R_4(x) \leq \frac{x^5}{5}$ et pour $-1 < x \leq 0$ nous obtenons l'estimation $R_4(x) \leq \frac{x^5}{5(1-x)^5}$.

2. On cherche le développement limité d'ordre 4 de la fonction $f(x) = \sin(x)$ autour de $a = 0$. Le polynôme de Taylor d'ordre 4 est donné par

$$P_4(x) = P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}.$$

Il existe un c entre 0 et x tel que

$$R_4(x) = \frac{\cos c}{5!}x^5.$$

Application au calcul des limites. Soit $f, g \in C^n(I)$ deux fonctions telles que $f^{(k)}(a) = g^{(k)}(a) = 0$ pour $0 \leq k < n$ et $g^{(n)}(a) \neq 0$. Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}. \tag{5.11}$$

En fait f et g admettent les développements limités

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,f}(x), \quad g(x) = \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n,g}(x)$$

On peut calculer la limite des expressions indéterminées par le développement limité. Par exemple, pour tout $a \geq 0$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x + ax^2} &= \lim_{x \to 0+} \frac{x + ax^2 - \sin x}{(x + ax^2)\sin x} = \lim_{x \to 0+} \frac{ax^2 + O(x^3)}{(x + ax^2)(x + O(x^3))} \\ &= \lim_{x \to 0+} \frac{ax^2 + O(x^3)}{x^2 + O(x^3)} = a\end{aligned}$$

en utilisant seulement $\sin x = x + O(x^3)$.

Application aux extremums. Soit $f \in C^n(I)$ une fonction telle que $f^{(k)}(a) = 0$ pour $1 \leq k < n$ et $f^{(n)}(a) \neq 0$. Alors

1. Si n est pair et $f^{(n)}(a) > 0$, la fonction f admet un minimum relatif strict en a.
2. Si n est pair et $f^{(n)}(a) < 0$, la fonction f admet un maximum relatif strict en a.
3. Si n est impair et $f^{(n)}(a) \neq 0$, la fonction f admet un point d'inflexion en a.

5.4.3 Calcul des polynômes de Taylor

Introduction. Soit $f, g \in C^n(I)$. Leur polynôme de Taylor d'ordre $m \leq n$ sont donnés par

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

respectivement

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Le but est de calculer les polynômes de Taylor d'ordre $m \leq n$ pour les fonctions $\alpha f + \beta g$, fg, f/g et $g \circ f$ à partir de P_m et Q_m.

Linéarité. Le polynôme de Taylor d'ordre $m \leq n$ pour $\alpha f + \beta g$ est donné par $\alpha P_m + \beta Q_m$.

Produit de deux fonctions. Le polynôme de Taylor d'ordre $m \leq n$ pour fg est obtenu par le produit $P_m Q_m$ en ne conservant que les termes de degré $\leq m$.

Quotient de deux fonctions. Le polynôme de Taylor d'ordre $m \leq n$ pour f/g est obtenu par le développement du quotient P_m/Q_m en ne conservant que les termes de degré $\leq m$. On peut également trouver ce polynôme de Taylor par divison polynomiale de $P_m(x)/Q_m(x)$ jusqu'à l'ordre m en commençant par l'ordre 0 (voir l'exemple 2 ci-dessous).

Fonction composée. Soit $f(a) = 0$. Le polynôme de Taylor d'ordre $m \leq n$ pour $g \circ f$ autour de 0 est donné par $Q_m(P_m(x))$ et en ne conservant que les termes de degré $\leq m$:

$$Q_m(P_m(x)) = \sum_{k=0}^{m} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} P_m(x)^k$$

Exemples.

1. Trouver le polynôme de Taylor d'ordre 4 pour $\ln(1 + \sin x)$ autour de $x = 0$. Le polynôme de Taylor d'ordre 4 de la fonction $\ln(1 + x)$ est

$Q_4(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ et le polynôme de Taylor d'ordre 4 de la fonction $\sin x$ est $P_4(x) = x - \frac{x^3}{3!}$. Alors

$$Q_4(P_4(x)) = P_4(x) - \frac{P_4(x)^2}{2} + \frac{P_4(x)^3}{3} - \frac{P_4(x)^4}{4}$$

en ne conservant que les termes de degré ≤ 4. Donc, jusqu'à l'ordre 4, nous avons

$$\begin{aligned} Q_4(P_4(x)) &\sim P_4(x) - \frac{x^2 - 2x\frac{x^3}{6}}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \\ &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \end{aligned}$$

2. Trouver le polynôme de Taylor d'ordre 4 pour $\frac{\ln(1+x)}{1+\sin x}$ autour de $x = 0$. Autrement dit, on doit trouver le polynôme de Taylor d'ordre 4 noté $T_4(x)$ pour

$$\frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}}{1 + x - \frac{x^3}{3!}}$$

On divise les polynômes en commençant par l'ordre 0 :

$$\begin{aligned} T_4(x) &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}}{1 + x - \frac{x^3}{3!}} + O(x^5) \\ &= x + \frac{-\frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{12}}{1 + x - \frac{x^3}{3!}} + O(x^5) \\ &= x - \frac{3x^2}{2} + \frac{\frac{11x^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{4}}{1 + x - \frac{x^3}{3!}} + O(x^5) \\ &= x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} - \frac{23x^4}{12} + O(x^5) \end{aligned}$$

Fonction réciproque. Soit $P_m(x)$ le polynôme de Taylor d'ordre n autour de $x = 0$ de la fonction $f(x)$. Soit $Q_m(y)$ le polynôme de Taylor d'ordre n autour de $y = f(0)$ de sa fonction réciproque $f^{-1}(y)$. On trouve $Q_m(y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{a_k}{k!}(y - f(0))^k$ à partir de $P_n(x)$ en calculant itérativement les coefficients a_k dans la relation

$$x = Q_m(P_m(x)) = a_0 + a_1(P_m(x) - f(0)) + \frac{a_2}{2}(P_m(x) - f(0))^2 + ...$$

Les premiers coefficients sont donnés par

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = \frac{1}{f'(0)}$$

$$a_2 = -\frac{f''(0)}{f'(0)^3}$$

$$a_3 = -\frac{f'''(0)f'(0) - 3f''(0)^2}{f'(0)^5}$$

Exemples.

1. Calculer le polynôme de Taylor d'ordre 3 autour de $x = 0$ de la fonction $\arcsin x$. Avec $f(x) = \sin x$, on a $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ et $f'''(0) = -1$. Alors
$$Q_3(x) = x + \frac{x^3}{3!}$$

   Calcul explicite. Avec $P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$, les coefficients de $Q_3(x)$ satisfont la relation
$$x = a_1(x - \frac{x^3}{3!}) + \frac{a_2}{2}(x - \frac{x^3}{3!})^2 + \frac{a_3}{6}(x - \frac{x^3}{3!})^3$$
   en ne conservant que les termes de degré ≤ 3, i.e.
$$x = a_0 + a_1 x + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3 - a_1}{6}x^3 + O(x^4)$$
   Par conséquent $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ et $a_3 = 1$.

2. Calculer le polynôme de Taylor d'ordre 3 autour de $x = 0$ de $f(x) = xe^x$ et de sa fonction réciproque autour de 0. On a $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 2$ et $f'''(0) = 3$. Donc
$$P_3(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2}$$
   et
$$Q_3(y) = y - y^2 + \frac{3}{2}y^3$$

5.4.4 Application du développement limité au comportement asymptotique*

Dans certains cas, on peut appliquer le développement limité pour étudier le comportement d'une fonction f lorsque $x \to \pm\infty$, par exemple pour trouver ses asymptotes. Plus précisement, on cherche un développement de la forme
$$f(x) \sim g(x)(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots)$$
lorsque $x \to \infty$ (ou $x \to -\infty$) où $g(x)$ représente une fonction "simple" telle que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = a_0.$$

Méthode générale. Pour calculer un tel développement lorsque $x \to +\infty$ (s'il existe !), on peut poser $y = \frac{1}{x}$ et définir une fonction $h(y)$ par
$$h(y) = \begin{cases} \frac{f(1/y)}{g(1/y)} & \text{si } y > 0 \\ a_0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Les hypothèses pour garantir le fonctionnement de la méthode : on suppose que h soit $m+1$ fois dérivable à droite en $y = 0$ et on prolonge h pour $y < 0$ tel que h est de classe C^{m+1} dans un voisinage de 0. Alors $h(y)$ admet un développement limité autour de 0 de la forme $h(y) = P_m(y) + R_m(y)$ avec $R_m(y) = O(y^{m+1})$. On en déduit que

$$f(x) = g(x)(P_m(1/x) + O(x^{-m-1}))$$

lorsque $x \to \infty$.

Exemple. Soit $f(x) = \sqrt{x^4 + 4x^3 + 1}$. Donner a, b, c tels que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - ax^2 - bx - c = 0.$$

On écrit $f(x) = x^2\sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}}$. Donc $h(y) = \sqrt{1 + 4y + y^4}$ est de classe C^∞ dans un voisinage de 0 et admet pour développement limité

$$h(y) = 1 + 2y - 2y^2 + O(y^3).$$

Par conséquent, lorsque $x \to \infty$,

$$f(x) = x^2(1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + O(x^{-3})) = x^2 + 2x - 2 + O(x^{-1})$$

i.e. $a = 1$, $b = 2$ et $c = -2$.

5.4.5 Séries entières

Définition. Soit f une fonction de classe $C^\infty(I)$. On appelle

$$P_\infty(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$

la série de Taylor (ou série entière) de la fonction f développée au point a. Le polynôme de Taylor $P_m(x)$ représente pour tout $m \in \mathbb{N}$ une somme partielle de cette série.

Remarque. La série de Taylor est convergente pour $x = a$ et $P_\infty(a) = f(a)$, mais elle n'est pas nécessairement convergente pour $x \neq a$. D'autre part, si $P_\infty(x) < \infty$, on n'a pas toujours $f(x) = P_\infty(x)$. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

est de classe $C^\infty(I)$ et $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $P_\infty(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La classe des fonctions pour lesquelles $f(x) = P_\infty(x)$ est appelée la classe des séries entières ou la classe des fonctions réelles analytiques.

Série entière et son rayon de convergence. Soit (a_n) une suite numérique et $a \in \mathbb{R}$. La série

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - a)^k$$

est appelée une série entière. De plus, soit R défini par

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

en utilisant la convention que

$$R = 0 \quad \text{si} \quad \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = +\infty$$

et

$$R = +\infty \quad \text{si} \quad \limsup_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0.$$

R est appelé le rayon de convergence de la série. Par conséquent, pour $|x-a| < R$ la série est absolument convergente et pour $|x-a| > R$ la série diverge.

Pour $|x-a| < R$ on définit la fonction f par

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-a)^k$$

Théorème 5.21. ***Dériver une série entière.*** *La fonction $f(x)$ est de classe $C^\infty(]a-R, a+R[)$. En particulier,*

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}$$

et

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

i.e. $f(x) = P_\infty(x)$ pour $|x-a| < R$.

Ce résultat est une conséquence d'un résultat plus général pour des séries de fonctions uniformément convergentes (voir le théorème 6.11 et son corrolaire 6.13). Nous donnons une démonstration élémentaire de ce résultat :

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut prendre $a = 0$. D'abord notons que les les séries $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ et $\sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}$ ont le même rayon de convergence. Pour démontrer le théorème, nous avons besoin de l'inégalité suivante. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x, h \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{(x+h)^k - x^k}{h} - kx^{k-1}\right| \leq \frac{k(k-1)}{2} |h|(|x| + |h|)^{k-2}. \tag{5.12}$$

En appliquant la formule du binôme de Newton au terme $(x+h)^k$, on trouve l'identité

$$\frac{(x+h)^k - x^k}{h} - kx^{k-1} = h \sum_{j=0}^{k-2} \frac{k(k-1)}{(k-j)(k-j-1)} \binom{k-2}{j} x^k h^{k-2-j}.$$

En prenant la valeur absolue en utilisant l'inégalité $\dfrac{k(k-1)}{(k-j)(k-j-1)} \leq \dfrac{k(k-1)}{2}$ pour $0 \leq j \leq k-2$, on obtient

$$\left|\frac{(x+h)^k - x^k}{h} - kx^{k-1}\right| \leq |h| \sum_{j=0}^{k-2} \frac{k(k-1)}{2} \binom{k-2}{j} |x|^k |h|^{k-2-j}$$

et l'inégalité (5.12) suit en appliquant la formule du binôme de Newton au membre de droite.

Soit $|x| < R$ (rappel : $a = 0$). Alors il existe $\delta > 0$ tel que $|x| < R - \delta$ et $|x| + |h| < R - \delta$ pour tout $|h| \leq \delta$. Grâce à la convergence absolue, on peut changer l'ordre des termes dans les séries. Alors pour $0 < |h| < \delta$:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \Big(\frac{(x+h)^k - x^k}{h} - kx^{k-1} \Big)$$

d'où par l'inégalité (5.12)

$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1}\right| \leq |h| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)}{2} a_k (|x| + |h|)^{k-2}$$

et cette série converge absolument grâce à l'hypothèse $|x| + |h| < R - \delta$. Il en suit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} = 0$$

d'où l'affirmation $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}$. Par le même argument, la série $f'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} k a_k (x-a)^{k-1}$ est dérivable et on conclut que $f \in C^{\infty}(]a-R, a+R[)$ par récurrence. $\square$

Exemples.

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!,} \qquad x \in \mathbb{R} \\
\sinh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R} \\
\cosh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \qquad x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \qquad x \in \mathbb{R} \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \qquad x \in]-1,1[\\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \qquad x \in]-1,1[\\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \qquad x \in]-1,1[
\end{aligned}$$

5.5 Étude d'une fonction

L'étude d'une fonction réelle f consiste en général à déterminer ses propriétés selon la liste suivante :

1. Domaine de définition et son image (si c'est déjà possible sans passer par les points ci-dessous), appartenance à une classe C^k.
2. Parité, autres symétries, périodicité
3. Continuité et les points de discontinuité avec calcul des limites en ces points.
4. Valeurs ou limites aux points frontières du domaine de définition, calcul des asymptotes ou du comportement asymptotique.
5. Dérivabilité avec calcul de la fonction dérivée f'.
6. Points stationnaires et leur nature, extremums locaux.
7. Points d'inflexion.
8. Éventuellement donner un tableau de variation et dessiner le graphe de f.

Souvent ces propriétés ne peuvent pas être déterminées dans l'ordre de cette liste. Par exemple, souvent on détermine l'image de f à la fin après le calcul des extremums ou on calcule les limites aux points frontières du domaine et les asymptotes à l'aide de f'.