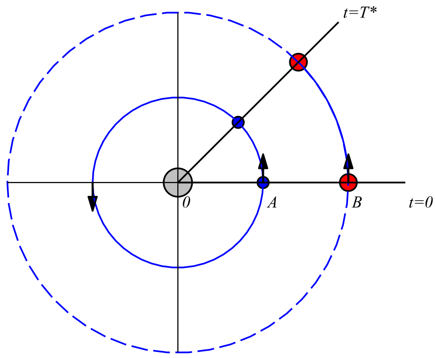
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Section des mathématiques

Analyse pour la Physique ⇒ Analyse avancée

Quelques exercices avant le début — Septembre 2016[1]

1. **L'inégalité fondamentale.** Sachant que pour tous x réel $x^2 \geq 0$ et $x^2 = 0$ si et seulement si $x = 0$ montrer que
$$a^2 + b^2 \geq 2ab \tag{1}$$
pour tous a, b réels. Dans quel cas cette inégalité est une identité ?
   (a) En utilisant que pour tous $y > 0$ l'unique solution positive de $x^2 = y$ est $x = \sqrt{y}$ déduire de l'éq (1) l'ingalité arithmético-géométrique :
$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2} \tag{2}$$
pour tous $x_1, x_2 \geq 0$.
   (b) Déduire de l'éq (1) que pour tous a, b réels et $\lambda > 0$:
$$\lambda a^2 + \lambda^{-1} b^2 \geq 2ab. \tag{3}$$
Pour quel(s) λ en fonction de a, b on obtient l'inégalité stricte ?
   (c) Soient $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots$ tels que pour tous R réels et tous entier positif n
$$x_1 + \ldots + x_n \geq nR^2 - \frac{R^4}{4\pi}.$$
En déduire que $x_1 + \ldots + x_n \geq \pi n^2$.
2. **Un cas spécial d'une inégalité de Karamata.** Soient x_1, x_2, y_1, y_2 des réels tels que $x_1 \geq x_2$, $y_1 \geq y_2$, $x_1 \geq y_1$ et $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$. Montrer que
$$x_1^2 + x_2^2 \geq y_1^2 + y_2^2.$$
Idée : Prendre la différence de deux membres et appliquer une formule de binôme.
3. **Au-delà des enjeux mondiaux : l'infini.** Supposons que l'univers est infini, homogène et isotrope en tout temps au sens suivant : les étoiles d'une luminosité isotrope plus grande que $L > 0$ sont uniformément réparties. Autrement, dit dans chaque secteur du ciel le nombre d'étoiles à distance inférieure de r est proportionnel à r^3. On sait que la luminosité observée (le flux lumineux reçu) est inversement proportionnelle du carré de la distance. Le ciel est noir la nuit. En déduire une contradiction.
4. **Nombres : intervalles et entiers.** Pour $b > a \geq 0$ soit $N_{a,b}$ le nombre d'entiers naturels dans l'intervalle $[a, b] := \{x : x \text{ réel et } a \leq x \leq b\}$. Donner $N_{a,b}$ et montrer que $b - a - 1 \leq N_{a,b} \leq b - a + 1$.

5. **Nombres et Astronomie : la période synodique.** Deux objets A et B tournent à vitesse constante dans le même sens autour du centre O sur des cercles de rayon $r_A < r_B$ avec des périodes $T_A < T_B$. Au temps $t = 0$ ils se trouvent sur une droite dans l'ordre OAB.



   (a) Donner le temps $T^* > 0$ (dit la période synodique) qu'ils sont de nouveau sur une droite dans l'ordre OAB pour la première fois.

   (b) Si T_A, T_B sont des entiers positifs quand ils sont pour la première fois dans la même position de O, A, B qu'au temps $t = 0$?

   (c) Pour T_A, T_B des réels positifs donner un exemple qu'ils ne sont plus jamais dans la position initiale.

   (d) Les mêmes questions si A et B tournent dans le sens opposé.