Chapitre 1

Notions de base : Nombres, Structures et Fonctions

1.1 Exercices

1. **Ensembles.**
   (a) Soit $E = \{a, b, c\}$. Donner $\mathcal{P}(E)$.
   (b) Soit E un ensemble fini tel que $card(E) = n$. Donner $card(\mathcal{P}(E))$.
2. **Ensembles et Fonctions.** Soit $f : E \to F$ une fonction et $A, B \subset E$. Montrer que
   (a) $f[A \cap B] \subset f[A] \cap f[B]$,
   (b) $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$.

   Donner un exemple où $f[A \cap B] \neq f[A] \cap f[B]$.
3. **Le cardinal.** Soit E, F des ensembles finis. Montrer que
   (a) $card(E) + card(F) = card(E \cup F) + card(E \cap F)$ (principe d'exclusion-inclusion)
   (b) $card(E \times F) = card(E) \cdot card(F)$.
4. **Axiomes.** En utilisant les axiomes algébriques d'un corps $\mathbb{K}$, montrer que l'élément neutre de l'addition 0 est unique.
5. **Axiomes.** En utilisant les axiomes algébriques pour les nombres réels, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $0 \cdot x = 0$ et $(-1) \cdot x = -x$. En déduire que $(-1) \cdot (-1) = 1$.
6. **Axiomes.** En utilisant les axiomes d'ordre pour les nombres réels et le résultat de l'exercice 5, montrer que pour tout $x \neq 0$ on a : $x^2 := x \cdot x > 0$, i.e. le carré d'un nombre réel nonzéro est positif.
7. **Axiomes.** Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Montrer que l'équation $ax + b = 0$ admet l'unique solution $x = -\dfrac{b}{a}$.

8. **Axiomes.** Soit $K_{\sqrt{2}} = \{(a,b) := a + b\sqrt{2} \; : \; a,b \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que $K_{\sqrt{2}}(+,\cdot)$ est un corps où

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2), \quad (a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) = (a_1\cdot a_2+2b_1\cdot b_2, a_2b_1+a_1b_2).$$

9. **Développement décimal.** Montrer qu'un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique.

10. **Relation d'équivalence.** On rappelle la relation d'équivalence dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ qui définit l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels : $\frac{p}{q} \sim \frac{p'}{q'}$ si $pq' = p'q$. Soit $a, a', c, c' \in \mathbb{Z}$ et $b, b', d, d' \in \mathbb{Z}^*$ tels que $\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'}$. Montrer que
    (a) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \sim \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$
    (b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \sim \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$

11. **Nombres premiers I.** Montrer que tout nombre naturel $n > 1$ s'écrit de manière unique comme produit de nombres premiers :

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}, \quad p_1 < p_2 < \cdots < p_m, \quad k_i \in \mathbb{N}^*$$

Idée : raisonner par récurrence pour prouver l'existence de la décomposition en nombre premiers. Pour l'unicité, utiliser le lemme d'Euclide qui dit que si un nombre premier p divise un produit d'entiers ab, alors il divise a ou il divise b.

12. **Nombres premiers II.** Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

13. **Calcul des fonctions composées.** Pour les deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies respectivement par

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x \geq 0, \\ x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq 3, \\ x & \text{si } x < 3, \end{cases}$$

calculer $g \circ f$ et $f \circ g$.

14. **Propriétés des fonctions I.** Montrer que la fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ définie par

$$f(m,n) = 2^m(2n+1)$$

est bijective.
En déduire une bijection entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ et $\mathbb{N}$ et entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{N}$.

15. **Propriétés des fonctions II.** Soit une fonction bijective $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ telle que $g(0) = 0$. Montrer que g n'est pas croissante.

16. **Propriétés des fonctions III.** Montrer que la fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

est bijective. Donner f^{-1}.

17. **Propriétés des fonctions IV*.** Montrer que la fonction $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(m, n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} + m$$

est bijective.

18. **Fonctions des ensembles I.** Soit $A \subset \mathbb{R}$ et χ_A sa fonction indicatrice (voir cours). On note $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ le complémentaire de A. Vérifier que

$$\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x).$$

Soit $A, B \subset \mathbb{R}$. Vérifier que

$$\chi_A(x) \cdot \chi_B(x) = \chi_{A \cap B}(x)$$

et

$$\chi_A(x) + \chi_B(x) = \chi_{A \cup B}(x) + \chi_{A \cap B}(x).$$

Conclure que

$$\big(1 - \chi_A(x)\big)\big(1 - \chi_B(x)\big) = 1 - \chi_{A \cup B}(x).$$

Interpréter cette identité.

19. **Fonctions des ensembles II - principe d'exclusion-inclusion.** Soit $A_1, \ldots, A_n \subset \mathbb{R}$. Montrer par récurrence que

$$1 - \chi_{A_1 \cup \ldots \cup A_n}(x) = \prod_{k=1}^{n} \big(1 - \chi_{A_k}(x)\big)$$

20. **La progression géométrique.** Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout entier positif n :

$$x^n - y^n = (x - y) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x^{n-k-1} y^k$$

En déduire la somme d'une *progression géométrique*, à savoir pour tout réel $a \neq 1$ et tout entier positif n :

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

21. Montrer que $1234^{1234} - 1$ est divisible par 1233.

22. **Inégalité de Young.** Montrer que pour tout entier positif n et tout $a, b > 0$:
$$b(b^n - a^n) - na^n(b - a) \geq 0.$$
En déduire *l'inégalité de Young* pour tout $x, y > 0$:
$$xy \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{ny^{\frac{n+1}{n}}}{n+1}.$$

23. **Une progression arithmétique.** Montrer que pour tout entier positif n :
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

24. **La somme de carrés d'entiers.** Montrer que pour tout entier positif n :
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
En déduire la somme suivante :
$$\sum_{k=0}^{1000} (k+1)(2k+3).$$

25. **La somme alternée de carrés d'entiers.** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$$

26. **Une inégalité pour la factorielle.** Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$:
$$n! > 2^n.$$
Donner le plus petit n_0 possible.

27. **La somme de cubes d'entiers.** Pour tout entier positif n, donner
$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$
Idée : appliquer l'identité
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-k}$$
et les résultats des exercices 23 et 24.

28. **La formule du binôme de Newton.** Soit k, n des entiers tels que $0 \leq k \leq n$. On définit le coefficient binomial C_n^k par

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Vérifier que pour tout $n \geq k \geq 1$:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Montrer la *formule du binôme de Newton* pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ et tout entier positif n :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

(a) Constater que pour tout entier $n > 1$:

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

(b) Montrer que pour tout entier $n > 1$, l'équation $a^n + b^n = c^n$ n'admet aucune solution pour $a, b, c \in \mathbb{N}$ avec $0 < a, b < n$.

29. **Sommes téléscopiques I.**
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction définie pour tout entier naturel n. Montrer par récurrence la somme téléscopique

$$f(n+1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n} \big(f(k+1) - f(k)\big)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(a) En posant $f(n) = a^n$ pour un $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 1$, démontrer ainsi la formule pour la progression géométrique (voir exercice 20).

(b) Poser $f(n) = n^2$ et en déduire la formule pour la progression arithmétique (voir exercice 23).

(c) Trouver une formule pour

$$\sum_{k=0}^{n} k a^k.$$

30. **Sommes téléscopiques II.** En posant $f(n) = \sin((n+a)x)$ avec $a, x \in \mathbb{R}$, choisir a convenablement et donner pour tout $x \in \mathbb{R}$ la somme trigonométrique

$$\sum_{k=0}^{n} \cos kx.$$

31. **Un produit fini.** Montrer que pour tout entier positif n :

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$

32. **L'inégalité de Bernoulli.** Montrer *l'inégalité de Bernoulli* pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout entier positif n :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

33. **Extension de l'inégalité de Bernoulli.** Montrer l'inégalité suivante pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout entier positif n :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

34. **L'inégalité de Cauchy-Schwarz I.** Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ et $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Montrer *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

En déduire que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

Idée : pour montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz noter que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} x_k y_k x_l y_l$$

et écrire $x_k y_k x_l y_l$ comme somme et différence de carrés pour conclure.

35. **L'inégalité de Cauchy-Schwarz II *.** Montrer *l'inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

par récurrence.

36. **L'inégalité des moyennes géométriques et arithmétiques I*.** Soit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ dont le produit vaut 1. Montrer que

$$n \leq \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

37. **L'inégalité des moyennes géométriques et arithmétiques II*.** Soit $a_1 > 0, \ldots, a_n > 0$. Montrer que leur *moyenne géométrique* est inférieure à leur *moyenne arithmétique*. Autrement dit,

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

38. **Nombres rationnels et irrationels***
    (a) Montrer qu'il y a une infinité de rationnels entre deux irrationnels distincts.
    (b) Montrer qu'il y a une infinité d'irrationnels entre deux rationnels distincts.
39. **Infimum et Supremum.** Donner le supremum et l'infimum des ensembles suivants :
    (a) $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2.25\} \subset \mathbb{Q}$.
    (b) $B = \{x \in \mathbb{Q} : ax < 1\} \subset \mathbb{Q}$ où $a \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
    (c) $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 + 3x \leq 4\} \subset \mathbb{Q}$.
    (d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^4 \leq a^4\}$ où $a \in \mathbb{R}$.
    (e) $E = \{x \in \mathbb{R} : x = (-1)^n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$.
    (f) $F = \{(-0.5)^n + \frac{1}{n+1}, n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{R}$.
40. **Nonexistence des solutions rationnelles.**
    (a) Montrer que l'équation $x^2 = 5$ n'admet pas de solutions rationnelles.
    (b) Montrer qu'il n'y a pas de $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^3 = 2$.
41. **Sous-ensembles de $\mathbb{R}$.** Etudier si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés dans $\mathbb{R}$. Donner l'intérieur, le bord et l'adhérence de chaque ensemble.
    (a) $A =]-1, \sqrt{2}]$.
    (b) $B =]\sqrt{2}, \infty[$.
    (c) $C = \{x \in \mathbb{R} : |2x - 1| \leq 1\}$.
    (d) $D = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| < 1\}$.
    (e) $E = \{\dfrac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} :\}$.
    (f) $F = \{\dfrac{n(-1)^n}{n+1}, n \in \mathbb{N} :\}$.
    (g) $G = \mathbb{Z}$.
    (h) $H = \mathbb{Q}$.
    (i) $I = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$.
42. **Fonctions réelles.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement (dé)croissante. Montrer que f est injective. Donner l'exemple d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injective qui n'est pas monotone.
43. **La valeur absolue.** Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:
    $$|x + y| + |x - y| = |x| + |y| + ||x| - |y||.$$
    Indication : appliquer d'abord l'homogénéité de la valeur absolue pour conclure qu'il suffit de considérer les cas $y = 0$ et $y = 1$.
44. **La valeur absolue.** Transformer les fonctions suivantes en fonctions définies par morceaux. Dessiner le graphe.
    (a) $f(x) = |x - 1| + |x + 1| - 2|x|$.
    (b) $g(x) = ||x| - 1| - |x|$.

(c) $h(x) = |x-4| + |x+4| - |x-1| - |x+1|$.

45. **Une inégalité pour des fonctions trigonométriques.** Pour $0 \leq h < \frac{\pi}{2}$, montrer à l'aide du cercle trigonométrique que

$$0 \leq \sin h \leq h \leq \tan h.$$

En déduire que pour tout $0 < h < 1$:

$$1 - h < 1 - h^2 < \cos h < \frac{\sin h}{h} < 1.$$

Idée : utiliser le fait que si $A \subset B \subset \mathbb{R}^2$, alors $\text{Aire}(A) \leq \text{Aire}(B)$.

46. **Nombres complexes.** Soit $z = x + iy \neq i$. Ecrire en fonction de x et y

$$\text{Re}\left(\frac{z^2}{z-i}\right) \quad \text{et} \quad \text{Im}\left(\frac{z^2}{z-i}\right).$$

47. **Nombres complexes.** Soit $z = re^{i\theta} = r\exp(i\theta) \neq 0$. Ecrire en fonction de r et θ

$$\Re\left(z - \frac{1}{z}\right) \equiv \text{Re}\left(z - \frac{1}{z}\right) \text{ et } \Im\left(z - \frac{1}{z}\right) \equiv \text{Im}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

48. **Nombres complexes.** Soit $z = e^{i\theta}$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i \sin n\theta$$

et

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta.$$

49. **Nombres complexes.** Pour le nombre complexe $z = 1 + i$, calculer $\overline{z}$, $|z|$, $\arg z$ et z^{-1}.

50. Calculer

$$\left(\frac{i + \sqrt{3}}{2}\right)^{19}.$$

51. **Sommes trigonométriques.** Soit $\theta \neq 2\pi p$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Pour tout entier $n \geq 1$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}.$$

En déduire les deux sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \sin k\theta \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta.$$

52. **Factorisation d'un polynôme.** Soit $z \in \mathbb{C}$. On considère un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$: $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Montrer que si z_0 est une racine de P_n, alors $z - z_0$ divise P_n. Autrement dit, on pourra écrire $P_n(z) = (z - z_0)(b_{n-1}z^{n-1} + \cdots + b_0)$.

53. **Équations de degré 2.**
    (a) Résoudre $z^2 + z + 1 = 0$.
    (b) Résoudre $z^2 + 2z + 5 = 0$.
    (c) Résoudre $4z^2 + 2z + 1 = 0$.
    (d) Résoudre $z^2 - 2iz - 3 = 0$.
    (e) Résoudre $(1 + i)z^2 + (-1 + 7i)z - (10 - 2i) = 0$.

54. **Équations de degré 3.**
    (a) Résoudre $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$.
    (b) Résoudre $2z^3 + 14z^2 + 41z + 68 = 0$.

55. **Équations algébriques.**
    (a) Résoudre
    $$z^6 + i = 0$$
    .
    (b) Vérifier que $2 + i$ est une solution de l'équation
    $$z^4 - 2z^3 - z^2 + 2z + 10 = 0.$$
    Trouver les trois autres racines.
    (c) Résoudre l'équation
    $$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$$
    sachant qu'elle admet une racine qui est imaginaire pure.
    (d) Résoudre $z^4 + 3z^2 + 1 = 0$.
    (e) Résoudre $z^4+1 = 0$. Ecrire z^4+1 comme produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients réels.

56. **Point fixe d'une application.** Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. On appelle $p \in \mathbb{C}$ un point fixe de l'application f si $p = f(p)$. Trouver les points fixes de f si $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$.

57. **Équation d'un cercle dans le plan complexe.** Soit $r > 0$ tel que $r \neq 1$. Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{C}$, l'ensemble S défini par
    $$S := \{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z - z_0}{z}\right| = r\}$$
    représente un cercle. Donner son centre et son rayon.

58. **Image d'un cercle sous une application affine.** Soit $S := \{z \in \mathbb{C} : |z - (1+2i)| = 1\}$. Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ l'application affine donnée par $f(z) = (2+3i)z + 4 + 5i$. Donner l'ensemble $f[S]$, i.e. l'image du cercle S sous f.

59. **Image d'un cercle sous l'application $\mathbf{f(z) = \frac{1}{z}}$.*** Pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R > 0$ tel que $|z_0| \neq R$, soit

$$S_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : d(z, z_0) = |z - z_0| = R\}.$$

Démontrer la proposition suivante. L'image du cercle $S_R(z_0)$ sous l'application $z \to \frac{1}{z}$ est le cercle

$$S_{\frac{R}{|R^2 - |z_0|^2|}}\left(\frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2}\right)$$

Quels cercles sont identiques à leur image sous cette application ?