Chapitre 3

Séries

3.1 Exercices

1. **Calcul des séries et des limites.**

   (a) Calculer

   $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1}$$

   (b) Calculer

   $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k^2+5k+6}$$

   (c) Calculer

   $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k+2}{k^3+5k^2+8k+4}$$

   (d) Calculer

   $$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2+4k+3}{k^4+8k^3+22k^2+24k+9}$$

   (e) Calculer

   $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$

   (f) Calculer

   $$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$

   (g) Calculer

   $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{5^n}$$

   (h) Calculer

   $$\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-n}$$

(i) Calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

(j) Calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n+1}\right)$$

2. **Convergence des séries.** Etudier la convergence des séries suivantes :

(a)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+n+3}$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+2}$$

(c)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n+3}$$

(d)
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin 2n^2}{n^2+3}$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n!}{n^2+1}$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos 2n}{n^2}$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2}}{n}$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+3)}}$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n^5}}{n^3+1}$$

(j)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 2\sqrt{n}}$$

(k)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+3}}$$

(l)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$$

(m)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$$

(n) Discuter, en fonction du nombre réel $\alpha > 0$ et $\alpha \neq 1$, la convergence de la série suivante :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{\alpha^{2n} - 1}$$

3. **Une série alternée.** Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} k}{k^2 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}.$$
Calculer ensuite la série
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k}{k^2 - \frac{1}{4}}.$$
Converge-t-elle absolument ?

4. **Une série convergente.** Montrer que pour $|q| < 1$ la série
$$\sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1}$$
est absolument convergente. Calculer sa valeur. Idée : montrer que
$$(1-q) \sum_{k=1}^{\infty} k q^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$
ou calculer les sommes partielles (voir l'exercice 29 du ch. 1).

5. **Convergence d'une série.** Si $1 < \alpha \leq 2$ montrer que
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

converge. Idée : montrer par récurrence que pour tout entier naturel p

$$S_{2^p-1} = \sum_{k=1}^{2^p-1} \frac{1}{k^\alpha} \leq \sum_{n=0}^{p-1} \big(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\big)^n$$

et montrer ensuite que pour tout entier naturel n

$$S_n \leq \frac{1}{1-2^{1-\alpha}}.$$

6. **Combinaison des séries géométriques.** Montrer que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (3+(-1)^n) \cdot 2^{-n}$$

est absolument convergente et donner sa valeur.

7. **Séries géométriques de nombres complexes.** Soit (z_n) une suite de nombres complexes. On dit que la suite (z_n) converge vers z, notée $\lim_{n\to+\infty} z_n = z$ si et seulement si $\lim_{n\to+\infty} |z_n - z| = 0$ où $|c|$ denote le module d'un nombre complexe c. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, $q \in \mathbb{C}$, converge si et seulement si $|q| < 1$ et donner sa valeur. En déduire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{in\theta} = \frac{1-a\cos\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} + i\frac{a\sin\theta}{1+a^2-2a\cos\theta}, \quad a \in]-1,1[,\ \theta \in \mathbb{R}.$$

8. **Calcul des séries.** Calculer les séries suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1-i)^n}$
   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+i)^n}$
   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+i(-1)^n)^n}$
   (d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3+\sin\frac{\pi n}{2})^n}$
9. * Démontrer le résultat sur le produit de séries absolument convergentes.
10. Démontrer la formule de sommation par partie : soit $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques (ou complexes) et $C_k := \sum_{j=0}^{k} c_j$. On démontre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} b_k c_k = b_{n+1} C_n + \sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) C_k. \tag{3.1}$$

En déduire le critère suivant : si $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $\lim_{k\to+\infty} b_k$ existe et si la suite des sommes partielles des c_k donnée par $C_k = \sum_{j=0}^{k} c_j$ converge, alors la série $\sum_{k=0}^{\infty} b_k c_k$ converge.

11. **Convergence des séries.*** Etudier la convergence des séries suivantes :
   (a)
$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sin(\frac{1}{p})$$
   (b)
$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \sin(\frac{1}{k})$$
   (c)
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin(\frac{(-1)^k}{k})$$
   (d)
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tan(\frac{1}{k^2})$$
   (e)
$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \sin(6 \cdot 10^{23} \cdot k^{-1})$$
   (f)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{k\sin(k)}{k^2+1}$$
   (g) ** Pour $x \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{k\sin(kx)}{k^2+1}$$
   (h)
$$\sum_{k=0}^{+\infty} i^k$$
   (i)
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^k}{k+2}$$
12. * **Le nombre d'Euler est un nombre irrationnel.** En suivant un argument de Joseph Fourier (1768 - 1830), on démontre que le nombre d'Euler e est un nombre irrationnel. On suppose que $e = \frac{p}{q}$ avec p, q des entiers positifs. On définit
$$x = q!\left(e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\right).$$

(a) Montrer $x \in \mathbb{Z}$.

(b) En utilisant la série exponentielle montrer que $x > 0$.

(c) Montrer que pour des entiers $k \geq q + 1$:

$$\frac{q!}{k!} \leq \frac{1}{(q+1) \cdot (q+2)^{k-q-1}}.$$

En déduire que $x < 1$ et conclure.

13. **Séries pour le sinus et le cosinus.** En utilisant seulement les séries

$$\cos\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \theta^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

montrer que $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$. Idée : prendre le produit de séries et appliquer les identités

$$2 \cdot 4^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} 2n+2 \\ 2k+1 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{n+1} \begin{pmatrix} 2n+2 \\ 2k \end{pmatrix}.$$

14. **Critère de d'Alembert - cas divergent.** Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^*$ pour laquelle $\lim\limits_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \rho$. Montrer que si $\rho > 1$, alors la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.

15. **Critère de Cauchy - cas divergent.** Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}$ pour laquelle $\limsup\limits_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \rho$. Montrer que si $\rho > 1$, alors la série $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge.

16. **Fonctions spéciales.** Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

17. **Fonctions spéciales.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

18. **Fonctions spéciales.** Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$$

19. **Fonctions spéciales.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

20. **Fonctions spéciales.** Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$\operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

21. **Fonctions spéciales.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ les séries

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

sont absolument convergentes. De plus, montrer que

$$\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

22. **Fonctions spéciales.** Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer

$$\sinh x + i \sin(ix),\ \cosh x - \cos(ix),\ \sinh(x + i\frac{\pi}{2}),\ \cosh(x + i\frac{\pi}{2})$$

23. **Fonctions spéciales.** Soit $z = x + iy$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\cosh(z) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$$

24. **Fonctions spéciales.** Soit $z = x + iy$ et $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\cosh^2(z) - \sinh^2(z), \quad \cos^2(z) + \sin^2(z)$$

25. **Produit infini - une application du logarithme.** Soit $a_k > 0$ tel que le produit infini $P := \prod_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=0}^{n} a_k$ existe. Si $P > 0$ montrer que $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$. Donner des exemples tels que $\lim_{k\to\infty} a_k = 1$ et $\prod_{k=0}^{\infty} a_k = \infty$ et $\prod_{k=0}^{\infty} a_k = 0$.

26. **Divergence d'une série.**

    (a) Soit $a_k = \dfrac{\cos^2 k}{k+1}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge. Idée : supposer que la série converge et conclure que sous cette hypothèse $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\sin^2(2k)}{2k+1}$ converge aussi pour en déduire une contradiction.

    (b) En déduire de la première partie que $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{\cos k}{k+1}$ ne converge pas absolument.