Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Section des mathématiques

Analyse I PH

Chapitre 1 - exercices supplémentaires -les corrigés [1] Octobre 2017

---

1. **Calcul d'une somme finie.** Pour tout entier positif n calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} \tag{1}$$

Corrigé. Noter que

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\end{aligned}$$

d'où on obtient deux sommes téléscopiques pour arriver à

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right)$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}$$

2. **Inégalité de Tchebychev pour les sommes finies.** Soit n un entier positif et $c_k \geq 0$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$. Si $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{n-1} \leq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_{n-1} \leq b_n$ montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k c_k \sum_{k=1}^{n} b_k c_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \sum_{k=1}^{n} c_k. \tag{2}$$

Corrigé. En explicitant le produit de deux sommes on trouve

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k c_k \sum_{k=1}^{n} c_k - \sum_{k=1}^{n} a_k c_k \sum_{k=1}^{n} b_k c_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k b_k c_k c_l - a_k c_k b_l c_l.$$

En rendant symétrique les expressions on k et l ceci donne

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_k b_k c_k c_l + a_l b_l c_l c_k - a_k c_k b_l c_l - a_l c_l b_k c_k =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(a_k b_k + a_l b_l - a_k b_l - a_l b_k)c_k c_l = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}(a_k - a_l)(b_k - b_l)c_k c_l.$$

Par l'hypothèse sur les a_k et b_k le produit $(a_k - a_l)(b_k - b_l)$ est toujours non-négative. En fait, si $l \leq k$ les deux facteurs sont ≥ 0 et si $l \geq k$ les deux facteurs sont ≤ 0. Il en suit l'inégalit (2).

3. **Calcul d'une somme finie.** Pour tout entier positif n soit $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Calculer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}. \tag{3}$$

Corrigé. Noter que

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$