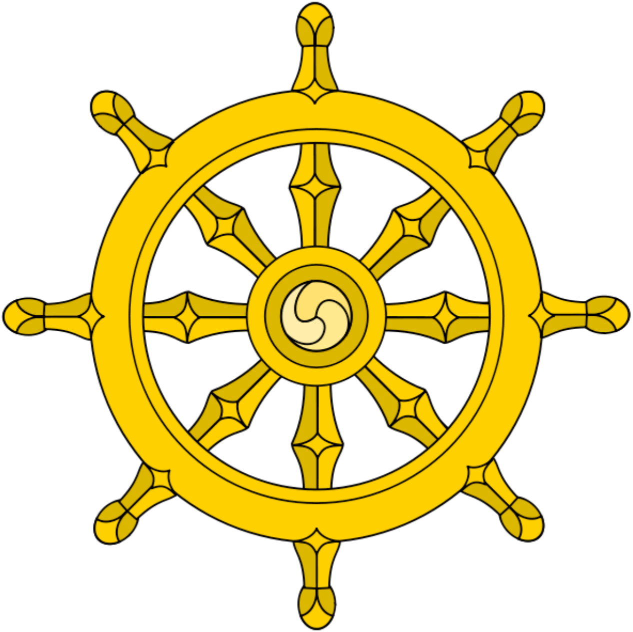
Murray Gell-Mann och den åttafaldiga vägen

Kathryn Hess

Institute of Geometry, Algebra and Topology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Sonja Kovalevskydagarna
Uppsala, den 7 november 2008



Översikt

Kvarkar

Kvarkar är elementarpartiklar, byggklossarna varav andra, större partiklar, som kallas hadroner uppbyggas. Så vitt fysikerna vet, finns det sex kvarkar:

u (upp), d (ner), s (sär), c (charm), b (botten) och t (topp).

Varje kvark har vissa fysikaliska egenskaper, som mätas genom olika kvanttal:

laddning, isospin, baryontal, särtal,

charmtal, bottental, topptal, och färgladdning.

För varje kvark, finns det en antikvark, som har motsatta kvanttal.

Hadroner

Mesoner är hadroner som byggas upp av en kvark och en antikvark. Till exempel, pi-mesonen π^+ byggas upp av en upp-kvark och en ner-antikvark.

Baryoner är hadroner som består av tre kvarkar eller tre antikvarkar. Till exempel, en proton består av två upp-kvarkar och en ner-kvark, mens en neutron består av en upp-kvark och två ner-kvarkar.

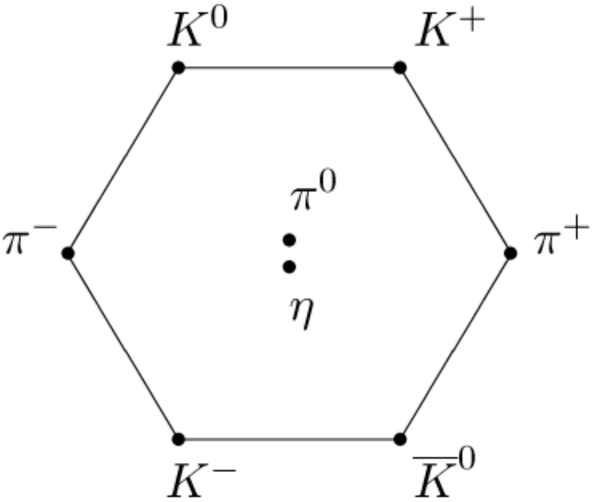
Än så länge har fysikerna inte upptäckt några andra sorters hadroner i naturen.

Kvarkmodellen och den åttafaldiga vägen I

Naturliga symmetrier bland egenskaper av de olika hadronerna inspirerade Murray Gell-Mann att utveckla en teori som organiserade de dåkända 9 mesonerna i

- en särskild ensamstående partikel, och
- en oktett som bestod av en sexkant samt två besläkta ensamstående partiklar.

Mesonoktetten



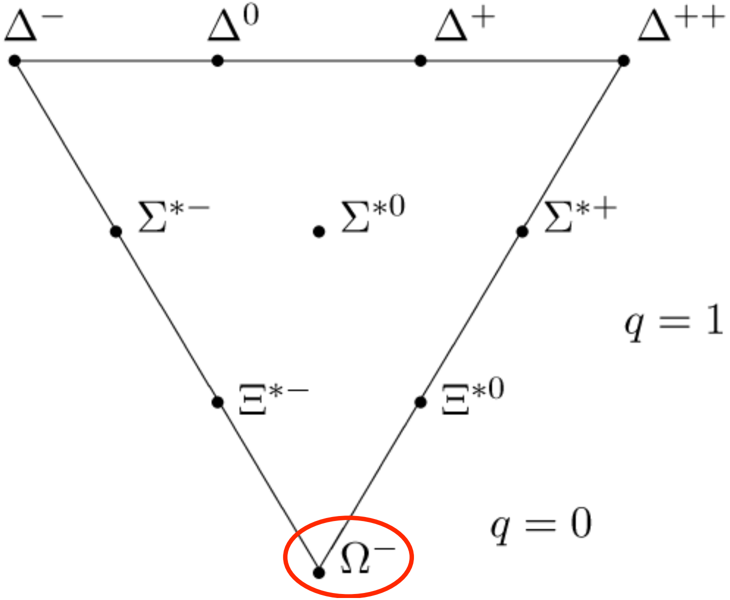
Kvarkmodellen och den åttafaldiga vägen II

Å andra sidan organiserade Gell-Mann de dåkända 26 baryonerna i

- en särskild ensamstående partikel,
- två oktetter, och
- en dekuplet, som bestod av nio partiklar liggande på en trekant och en besläkt ensamstående partikel—förutom att det fattades ett hörn av trekanten...

En partikels läge i sin gruppering bestämdes av sina fysikaliska egenskaper (laddning, särtal och isospin).

Baryondekupleten



Gell-Manns förutsägelse

Gell-Mann var helt säker på att hans teori var rätt. Han förutspådde alltså år 1962 att de måste finnas en baryon som kompletterade dekupleten.

År 1964 upptäcktes Gell-Manns partikel, Ω^-.

År 1969 fick Gell-Mann Nobelpriset i fysik för sin kvarkmodell.

Komplexa tal

Om a är ett reellt tal, är $a^2 \geq 0$. Alltså, för att kunna ta kvadratroten ur negativa tal, måste vi lägga till nya tal, bl a:

$$i = \sqrt{-1} \text{ : den imaginära enheten.}$$

Mängden $\mathbb{C}$ av komplexa tal består av summorna

$$a + ib,$$

där a och b är reella tal (möjligtivis 0!).
Summan och produkten definieras så här:

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

och

$$(a + ib)(a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

Matriser: definition

(2×2)-matriser:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

(3×3)-matriser:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Osv!

$(n \times n)$-matriser:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matriser: summan och skalärmultiplikationen

Fallet 2×2:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_1' & a_2 + a_2' \\ b_1 + b_1' & b_2 + b_2' \end{pmatrix}$$

$$c \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_1 & ca_2 \\ cb_1 & cb_2 \end{pmatrix}$$

För alla n, kan man ta summan av två $(n \times n)$-matriser eller multiplicera ett komplext tal och en $(n \times n)$-matris likadant.

Matrisprodukter och kommutatorer

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_1' + a_2 b_1' & a_1 a_2' + a_2 b_2' \\ b_1 a_1' + b_2 b_1' & b_1 a_2' + b_2 b_2' \end{pmatrix}$$

För $n > 2$, definieras produkten av två $(n \times n)$-matriser likadant.

Om M och M' är $(n \times n)$-matriser, definierar vi

$$[M, M'] = M \cdot M' - M' \cdot M : \text{kommutatoroperationen}$$

Lie-algebror

En Lie-algebra består av en mängd L, samt tre operationer för alla $x, y \in L$ och $a \in \mathbb{C}$:

- summan: $x + y \in L$,
- skalärmultiplikationen: $a \cdot x \in L$,
- liebracketen: $[x, y] \in L$.

Dessa operationer måste uppfylla vissa axiom, som är egenskaper av de naturliga matrisoperationerna, t ex:

$$[a \cdot x + b \cdot y, z] = a \cdot [x, z] + b \cdot [y, z], \qquad [x, x] = 0$$

och

$$\big[x, [y, z]\big] + \big[y, [z, x]\big] + \big[z, [x, y]\big] = 0.$$

Exempel på Lie-algebror: $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$

Lie-algebran $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ består av alla $(n \times n)$-matriser, med den vanliga summan och skalärmultiplikationen och där liebracketen är kommutatoroperationen.

Exempel på Lie-algebror: $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

Lie-algebran $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ består av alla (2×2)-matriser

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

där a, b, c är godtyckliga komplexa tal, med samma operationer som $\mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$.

$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ är verkligen en lie-algebra, eftersom

$$d \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} da & db \\ dc & -da \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & -a-a' \end{pmatrix},$$

och

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & -a' \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} bc' - b'c & 2(ab' - a'b) \\ 2(a'c - ac') & b'c - bc' \end{pmatrix}.$$

Exempel på Lie-algebror: $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$

Lie-algebran $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ består av alla (3×3)-matriser

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & -a_1 - b_2 \end{pmatrix},$$

där $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ är godtyckliga komplexa tal, med samma operationer som $\mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$.

Beviset att $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ verkligen är en Lie-algebra liknar fallet $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

Vad är en representation?

Låt L vara en Lie-algebra.

En representation av L är en avbildning

$$\varphi : L \to \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$$

sådan att:

- $\varphi(a \cdot x) = a \cdot \varphi(x)$,
- $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$, och
- $\varphi\big([x, y]\big) = \big[\varphi(x), \varphi(y)\big]$

för alla $x, y \in L$ och $a \in \mathbb{C}$.

Exempel på representationer av $\mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$

Den reguljära representationen:

$$\iota : \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_3(\mathbb{C}) : M \mapsto M$$

Dualen till den reguljära representationen:

$$\widehat{\iota} : \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$$

Om

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & -a_1 - b_2 \end{pmatrix},$$

då har vi

$$\widehat{\iota}(M) = \begin{pmatrix} -a_1 & -b_1 & -c_1 \\ -a_2 & -b_2 & -c_2 \\ -a_3 & -b_3 & a_1 + b_2 \end{pmatrix}.$$

Tensorprodukter: fallet $2 \times 2 = 4$

Låt $\varphi : L \to \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ och $\psi : L \to \mathfrak{gl}_2(\mathbb{C})$ vara representationer av en Lie-algebra L.

Tensorprodukten av φ och ψ är en representation

$$\varphi \otimes \psi : L \to \mathfrak{gl}_4(\mathbb{C})$$

sådan att för alla $x \in L$,

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \psi(x) = \begin{pmatrix} a_1' & a_2' \\ b_1' & b_2' \end{pmatrix}$$

innebär att

$$\varphi \otimes \psi(x) = \begin{pmatrix} a_1 + a_1' & a_2' & a_2 & 0 \\ b_1' & a_1 + b_2' & 0 & a_2 \\ b_1 & 0 & b_2 + a_1' & a_2' \\ 0 & b_1 & b_1' & b_2 + b_2' \end{pmatrix}.$$

Tensorprodukter: fallet $3 \times 3 = 9$

Låt $\varphi : L \to \mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$ och $\psi : L \to \mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$ vara representationer av en Lie-algebra L.

Tensorprodukten av φ och ψ är en representation

$$\varphi \otimes \psi : L \to \mathfrak{gl}_9(\mathbb{C})$$

som definieras på ett sätt som liknar fallet $2 \times 2 = 4$.

Gell-Manns teori: allmäna påståenden

De tre riktningarna i den reguljära representationen

$$\iota : \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$$

motsvarar de tre kvarkarna: u, d, och s.

De tre riktningarna i den duala representationen

$$\widehat{\iota} : \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_3(\mathbb{C})$$

motsvarar de tre antikvarkarna: $\bar{u}$,$\bar{d}$, och $\bar{s}$.

Tensorprodukter av dessa representationer motsvarar uppbyggning av hadroner från kvarkar.

Gell-Manns teori: mesoner

Eftersom varje meson består av en kvark och en antikvark, är antalet mesoner uppbyggda av u, d, s och dess antikvarkar lika med antalet riktningar i representationen

$$\iota \otimes \widehat{\iota} : \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_9(\mathbb{C}).$$

Alltså måste det finnas 9 mesoner uppbyggda av u, d, s och dess antikvarkar, vilket är lika med antalet mesoner som man kände till år 1962.

Gell-Manns teori: baryoner

Antalet baryoner uppbyggda av *u*, *d* och *s* är lika med antalet riktningar i representationen

$$\iota \otimes \iota \otimes \iota : \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}_{27}(\mathbb{C}).$$

Alltså måste det finnas 27 baryoner uppbyggda av *u*, *d*, *s*, men år 1962 kände man bara till 26 baryoner...