

Examen Propédeutique: Algèbre

13 septembre 2004

Exercice 1. (15 points)

Soit G un groupe et $g \in G$. On note par $\gamma_g : G \rightarrow G$ l'homomorphisme de conjugaison $\gamma_g(h) = ghg^{-1}$. On note par $\text{Int}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G qui sont de la forme γ_g pour un $g \in G$ quelconque.

- Montrer que $\text{Int}(G)$ est un sous-groupe normal de $\text{Aut}(G)$.
- Montrer que $\text{Int}(G) \cong G/Z(G)$ où $Z(G)$ désigne le centre de G .
- Montrer que $\sigma \in \text{Aut}(G)$ commute à tout automorphisme intérieur (i.e. , $\sigma \circ \gamma = \gamma \circ \sigma$ pour tout $\gamma \in \text{Int}(G)$) si et seulement si $x^{-1}\sigma(x) \in Z(G)$ pour tout $x \in G$.

Exercice 2. (15 points)

Un élément e d'un anneau commutatif est dit *idempotent* si $e^2 = e$.

- Montrer que $(1, 0)$ est un idempotent de $R \times R'$, où R et R' sont des anneaux commutatifs.
- Montrer que si e est idempotent alors $1 - e$ l'est aussi.
- Montrer que si e est idempotent alors (e) est un anneau dont l'unité est e .
- Montrer que si e est idempotent alors $R \cong (e) \times (1 - e)$ en tant qu'anneau.

Exercice 3. (5 points)

Quels sont les 3-sousgroupes de Sylow de S_4 ?

Exercice 4. (5 points)

Quel est le polynôme minimal sur \mathbb{Z} du nombre réel $\sqrt{-7 + \sqrt{77}}$?

Exercice 5. (30 points)

- Soit R un anneau commutatif, et soit $\{a_1, \dots, a_n\} \subset R$. Qu'est-ce qu'un plus grand diviseur commun (pgdc) de $\{a_1, \dots, a_n\}$?
- Montrer l'unicité des pgdc's à multiplication par unité près lorsque R est intègre et l'existence de pgdc's lorsque R est factoriel.
- Qu'est-ce qu'un élément premier d'un anneau commutatif? Qu'est-ce qu'un idéal premier d'un anneau commutatif?
- Montrer que si R est intègre et $a \in R \setminus \{0\}$, alors a est premier si (a) est premier. Si, de plus, R est factoriel, montrer que (a) est premier si a est premier.
- Soit $\mathbb{F} \subset \mathbb{E}$ une extension de corps. Soient $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. Montrer que s'il existe $h(x) \in \mathbb{E}[x]$ de degré positif tel que $h(x) \mid f(x)$ et $h(x) \mid g(x)$, alors le pgdc de $f(x)$ et de $g(x)$ dans $\mathbb{F}[x]$ est de degré positif.

Exercice 6. (30 points)

- (a) Existe-t-il un élément d'ordre 4 dans $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^*$? Justifier votre réponse.
- (b) Soit \mathbb{E} le corps de rupture de $25x^4 - 45x^3 + 12x^2 - 51 \in \mathbb{Q}[x]$. Existe-t-il $H < G(\mathbb{E}, \mathbb{Q})$ tel que $\#H$ soit impaire? Justifier votre réponse.
- (c) Soit \mathbb{F} un corps. Est-ce que l'anneau $\mathbb{F}[x, y]$ est euclidien? Justifier votre réponse.