




Série 10

Exercice 1.

- a) Montrer que $\mathbb{Z}[X]$ n'est pas principal. Exhiber un idéal de $\mathbb{Z}[X]$ qui ne soit pas engendré par un élément.
- b) Montrer que l'idéal $\langle 2, X \rangle$ est maximal.
- c) Soit $z \in \mathbb{C}$ et posons $I = \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid f(z) = 0\}$. Montrer que I est un idéal principal de $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 2. Soit A un anneau commutatif et $a \in A$.

-  a) Montrer que pour $f \in A[X]$ on a $f(a) = 0$ si et seulement si f est divisible par $X - a$.
-  b) Généraliser a) comme suit : Soit $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $f \in A[X_1, \dots, X_n]$. Montrer que $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ si et seulement si $f \in (X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$.
-  c) Montrer que, si $A = K$ est un corps, alors l'idéal $(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$ est maximal.
- d) Soit K un corps, I un idéal de $A = K[X_1, \dots, X_n]$. On dénote par $V(I) \subseteq K^n$ l'ensemble des zéros de I , c'est-à-dire $V(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in K^n \mid f(a_1, \dots, a_n) = 0 \text{ pour tout } f \in I\}$. Montrer qu'on a une inclusion

$$V(I) \longrightarrow \text{Spec}(A/I).$$

Exercice 3. Parmi les quotients d'anneaux suivants, dire lesquels sont des corps (respectivement des anneaux intègres) :

$$\begin{array}{cccc} \mathbb{Z}[X]/(X) & \mathbb{R}[X]/(X^2 + 1) & \mathbb{C}[X]/(X^2 + 1) & \mathbb{R}[X]/(X^2 + X + 1) \\ \mathbb{Q}[X]/(X^3 - X + 2) & \mathbb{Z}[X]/(5, X^2 + 1) & \mathbb{Z}[X]/(7, X^2 + 1) & \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]/(3, 1 - i\sqrt{5}) \end{array}$$

Exercice 4.

- a) Soit K un corps tel que $2 \neq 0$. Donner un critère pour l'irréductibilité de $X^2 + aX + b \in K[X]$.
- b) Décomposer les polynômes $X^4 + 1$ et $X^4 + X + 1$ dans $\mathbb{F}_2[X]$.
- c) Montrer que les polynômes $2X^4 + 7X^3 + 14X + 21$, $X^3 - 3X - 1$ et $X^3 + 462X^2 + 2433X + 67691$ sont irréductibles dans \mathbb{Q} . (Utiliser le critère d'Eisenstein)

Exercice 5. Soit $f \in A[X]$, montrer que $f(f(X)) - X$ est divisible par $f(X) - X$.