

L'exercice 3 est plutôt long et dur. L'exercice 5 est à rendre le 30 mai au début de la séance d'exercices.

1. Soit A un anneau intègre et $N : A \rightarrow \mathbf{N}$ une fonction vérifiant $N(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Supposons de plus que $N(xy) = N(x)N(y)$ pour tout $x, y \in A$.
 - (a) Montrer qu'il existe une fonction $N' : Q(A) \rightarrow \mathbf{Q}_+$ telle que $N'(a) = N(a)$ pour tout $a \in A$.
 - (b) Montrer que A est euclidien si et seulement si pour tout $x \in Q(A)$ il existe $c \in A$ tel que $N'(x - c) < 1$.
2. Soit $\mathbf{Z}[i]$ l'anneau des entiers de Gauss. Trouver le pgcd de $3 + 4i$ et $4 - 3i$.
3. Soit p un premier.
 - (a) (Wilson) Montrer que $(p - 1)! \equiv -1 \pmod{p}$. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$.)
 - (b) Supposons qu'il existe $c \in \mathbf{Z}$ tel que $p \nmid c$ et qu'il existe en outre $x, y \in \mathbf{Z}$ tels que $x^2 + y^2 = cp$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbf{Z}$ tels que $p = a^2 + b^2$. (Montrer d'abord que p n'est pas premier en tant qu'élément de $\mathbf{Z}[i]$.)
 - (c) Montrer que si $p = 4n + 1$ alors la congruence $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ possède une solution.
 - (d) (Fermat) Montrer que si $p = 4n + 1$ alors il existe $a, b \in \mathbf{Z}$ tels que $p = a^2 + b^2$.
 - (e) Montrer que si $p = 4n + 3$ alors il n'existe aucune paire $a, b \in \mathbf{Z}$ tels que $p = a^2 + b^2$.
4. Soit A un anneau commutatif. Montrer que $A[x]$ est principal si et seulement si A est un corps.
5. Soit R un anneau commutatif. On note $R[[x]]$ l'anneau des *séries formelles en x* , c'est-à-dire des expressions $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, où $a_n \in R$ pour tout $n \geq 0$.
 - (a) Montrer que $1 - x$ est inversible dans $R[[x]]$.
 - (b) Montrer que $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est inversible si et seulement si $a_0 \in R^*$.
 - (c) Soit K un corps. Montrer que $K[[x]]$ est un anneau local.