Série 11

✎ **Exercice 1.**

a) Soient $f_1, \dots, f_n$ des polynômes dans $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$. Montrer que le système

$$\begin{cases} f_1(X_1, \dots, X_n) & = & 0 \\ f_2(X_1, \dots, X_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_n(X_1, \dots, X_n) & = & 0 \end{cases}$$

admet une solution dans $\mathbb{C}^n$ sauf si on peut trouver des g_i tels que $f_1 g_1 + \cdots + f_n g_n = 1$.

b) Soient $f, g \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ tels que $\mathrm{V}(f) \subseteq \mathrm{V}(g)$. Montrer que tout facteur irréductible de f divise g.

c) Trouver les plus petits entiers n tels que $(X-Y)^n \in (X^2, Y^2)$, $(X-Y)^n \in (X^3, Y^3)$. Généraliser et trouver le plus petit entier n tel que $(X-Y)^n \in (X^m, Y^m)$

Exercice 2. Topologie de Zariski

Soit A un anneau commutatif. On désigne par $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des idéaux premiers de A. Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A on pose $\mathrm{Z}(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$.

a) Montrer que $\mathrm{Z}(0) = \mathrm{Spec}(A), \mathrm{Z}(A) = \emptyset, \mathrm{Z}(\mathfrak{ab}) = \mathrm{Z}(\mathfrak{a}) \cup \mathrm{Z}(\mathfrak{b})$ et

$$\mathrm{Z}(\sum_{i \in I} \mathfrak{a}_i) = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Z}(\mathfrak{a}_i)$$

pour tous idéaux $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ et pour toute famille d'idéaux $\{\mathfrak{a}_i\}_{i \in I}$.

b) Déduire de a) que la famille des $\mathrm{Z}(\mathfrak{a})$, où $\mathfrak{a}$ parcourt l'ensemble des idéaux de A, décrit les fermés d'une topologie sur $\mathrm{Spec}(A)$. Cette topologie s'appelle la **topologie de Zariski**.

c) Décrire les espaces topologiques $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X])$, $\mathrm{Spec}(K)$ (où K est un corps), $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[i])$.

d) Montrer que $\mathrm{Spec}(A \times B) = \mathrm{Spec}(A) \coprod \mathrm{Spec}(B)$.

e) Montrer que si A est intègre alors 0 est un point dense de $\mathrm{Spec}(A)$.

f) Identifier les points fermés de $\mathrm{Spec}(A)$.

g) Montrer que $\mathrm{Spec}(A)$ est compact.

h) Soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. Montrer que φ induit une application continue $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ définie par $\mathrm{Spec}(\varphi)(\mathfrak{p}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(B)$.

i) Montrer que $\mathrm{Spec}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{\mathrm{Spec}(A)}$ et que $\mathrm{Spec}(\varphi \circ \psi) = \mathrm{Spec}(\psi) \circ \mathrm{Spec}(\varphi)$ pour tous homomorphismes d'anneaux $\psi : A \to B$ et $\varphi : B \to C$. En déduire que si $\varphi : A \to B$ est un isomorphisme alors $\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ est un homéomorphisme.

j) Montrer que $\mathrm{Z}(\mathfrak{a})$ est homéomorphe à $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a})$ via l'application $\mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \to \mathrm{Spec}(A)$ induite par passage au quotient.

k) Décrire la topologie induite sur K^n par l'application $K^n \to \mathrm{Spec}(K[X_1, \dots, X_n])$.

l) Décrire en termes géométriques l'application $\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[X]) \to \mathrm{Spec}(\mathbb{R})$ induite par l'homomorphisme d'inclusion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}[X]$.