

L'exercice 7 est à rendre le 6 juin au début de la séance d'exercices.

1. Trouver le pgcd de  $t^3 - 2t^2 - t - 2$  et  $t^4 - 4t^2 - 3t + 6$  dans  $\mathbf{Q}[t]$ .
2. Soit  $\varphi : R \rightarrow S$  un homomorphisme d'anneaux et soit  $a \in S$ . Soit  $\iota : R \rightarrow R[t]$  l'inclusion canonique. Montrer qu'il existe un unique homomorphisme d'anneaux  $\theta : R[t] \rightarrow S$  tel que  $\theta(t) = a$  et  $\theta \circ \iota = \varphi$ .
3. Soient  $R$  un anneau commutatif,  $f(t) \in R[t]$ , et  $a \in R$ . Montrer que  $f(a) = 0$  si et seulement si  $(t - a)$  divise  $f(t)$ .
4. Montrer que
  - (a)  $t^2 + t + 1$  est irréductible sur  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ .
  - (b)  $6t^9 + 49t^6 + 21t^3 + 35t^2 + 14$  est irréductible sur  $\mathbf{Q}$ .
  - (c)  $t^3 - 9$  est irréductible sur  $\mathbf{Z}/31\mathbf{Z}$  mais réductible sur  $\mathbf{Z}/11\mathbf{Z}$ .
5. Soit  $R$  un anneau commutatif. Montrer que  $a_0 + a_1t + \dots + a_nt^n$  est inversible dans  $R[t]$  si et seulement si  $a_0 \in R^*$  et  $a_1, \dots, a_n$  sont nilpotents dans  $R$  (un élément  $a \in R$  est nilpotent s'il existe  $n > 1$  tel que  $a^n = 0$ ).
6. Soit  $K$  un corps et soit  $\sigma : K[t] \rightarrow K[t]$  un automorphisme tel que  $\sigma(1) = 1$ . Montrer qu'il existe des éléments  $a \in K$ ,  $a \neq 0$ , et  $b \in K$  tels que  $\sigma(t) = at + b$ .
7. Soit  $K$  un corps fini de  $q$  éléments.
  - (a) Montrer que le produit de tous les éléments non-nuls est  $-1$ .
  - (b) Soit  $a \in K$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $f(t)$  sur  $K$  tel que  $f(a) = 1$  et  $f(b) = 0$  pour tout  $b \in K$  tel que  $b \neq a$ .
  - (c) Soit  $a \in K$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $f(t)$  sur  $K$  tel que  $f(a) = 0$  et  $f(b) = 1$  pour tout  $b \in K$  tel que  $b \neq a$ .
  - (d) Soit  $\varphi : K \rightarrow K$  une fonction quelconque. Montrer qu'il existe  $f(t) \in K[t]$  tel que  $\varphi(x) = f(x)$  pour tout  $x \in K$ .
8. Soient  $K$  un corps,  $X \subset K^n$  un sous-ensemble, et  $J \subset K[t_1, \dots, t_n]$  un idéal. On pose

$$V(J) = \{x \in K^n \mid f(x) = 0 \forall f \in J\}$$

et

$$I(X) = \{f \in K[t_1, \dots, t_n] \mid f(x) = 0 \forall x \in X\}.$$

- (a) Montrer que  $I(X)$  est un idéal de  $K[t_1, \dots, t_n]$ .
- (b) Montrer que  $\sqrt{J} \subset I(V(J))$  et  $X \subset V(I(X))$ .
- (c) Montrer que  $I(X \cup Y) = I(X) \cap I(Y)$  et  $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$ .