


Série 12

 **Exercice 1.** Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est algébrique sur \mathbb{Q} . Trouver son polynôme minimal sur \mathbb{Q} et sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Calculer $[\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$. Trouver tous les corps intermédiaires entre \mathbb{Q} et $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

Exercice 2. Trouver le polynôme minimal de $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ et de $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ sur \mathbb{Q} .

Exercice 3. Calculer $[\mathbb{E} : \mathbb{Q}]$ où $\mathbb{E} = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7})$. Est-ce que $\sqrt[3]{2}$ est contenu dans \mathbb{E} ?

Exercice 4. Soit \mathbb{F} un corps et α un élément algébrique sur \mathbb{F} . Montrer que si α est de degré impair alors $\mathbb{F}(\alpha) = \mathbb{F}(\alpha^2)$.

Exercice 5. Soit $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{E}$ une extension algébrique de corps. Montrer que si R est un sous-anneau de \mathbb{E} qui contient \mathbb{F} alors R est un corps.

 **Exercice 6.** Montrer que dans un corps fini tout élément est somme de deux carrés.