L'exercice 5 est à rendre le 13 juin au début de la séance d'exercices.

1. Trouver le degré sur $\mathbf{Q}$ des corps suivants.
   (a) $\mathbf{Q}(\alpha)$ où $\alpha^3 = p$ (premier)
   (b) $\mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{3})$
2. Trouver le polynôme minimal de $\sqrt{2+\sqrt{5}}$ sur $\mathbf{Q}$.
3. Soit E une extension de degré p sur le corps F, et soit E' une extension de degré p' sur F, où p et p' sont des premiers. Montrer que soit $E = E'$, soit $E \cap E' = F$.
4. Soit $E = F(\alpha)$, où α est algébrique sur F de degré impair. Montrer que $E = F(\alpha^2)$.
5. Soit $\mathbf{F}_2$ le corps à deux éléments.
   (a) Montrer que $t^3 + t + 1$ est irréductible sur $\mathbf{F}_2$.
   (b) Montrer que $\mathbf{F}_8 = \mathbf{F}_2[t]/(t^3 + t + 1)$ est un corps.
   (c) Calculer $[\mathbf{F}_8 : \mathbf{F}_2]$ et dresser une liste d'éléments de $\mathbf{F}_8$.
   (d) Soit α l'image de $t \in \mathbf{F}_2[t]$ sous l'homomorphisme naturel $\mathbf{F}_2[t] \to \mathbf{F}_8$. Trouver α^{-1}. Calculer $(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1)$.
6. Soit $F \subset E$ une extension algébrique de corps. Montrer que si R est un sous-anneau de E qui contient F alors R est un corps.
7. Montrer que dans un corps fini tout élément est somme de deux carrés.