

Série 13

Exercice 1. Décrire les corps de rupture des polynômes suivants sur \mathbb{Q} et trouver leur degré.



- | | |
|--------------|-------------------------|
| a) $X^2 - 2$ | d) $X^2 - 1$ |
| b) $X^3 - 2$ | e) $(X^3 + 1)(X^2 - 2)$ |
| c) $X^5 - 7$ | f) $X^6 + X^3 + 1$ |

Exercice 2. Soit K un corps de caractéristique nulle. Montrer que tout polynôme $f \in K[X]$ qui vérifie $f(X) = f(X + 1)$ est constant.

Exercice 3. Soit \mathbb{F} un corps fini. Montrer qu'il existe un polynôme $f \in \mathbb{F}[X]$ tel que $f(\alpha) \neq 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{F}$.

Exercice 4. Utiliser les polynômes $X^2 + X - 1$ et $X^3 - X + 1$ pour construire des corps à quatre, huit, neuf et vingt-sept éléments. Écrire la table de multiplication du corps \mathbb{F}_4 à quatre éléments.

Exercice 5.

- Soit K un corps de caractéristique p et n un entier. Montrer que le polynôme $X^{p^n} - X$ n'a que des racines simples.
- Soit \mathbb{F} un corps fini. Montrer qu'il existe un premier p et un entier n tel que \mathbb{F} est un corps de rupture du polynôme $X^{p^n} - X \in \mathbb{F}_p[X]$. Remarquer de plus que \mathbb{F} coïncide avec l'ensemble des zéros de $X^{p^n} - X$ dans \mathbb{F} .
- Considérons le polynôme $f_n(X) = X^{p^n} - X$ sur $\mathbb{F}_p[X]$ et K un corps de rupture de f_n . Montrer que l'ensemble $V_K(f_n) = \{x \in K \mid f_n(x) = 0\}$ est un corps qui possède p^n éléments qui contient \mathbb{F}_p . Remarquer que $V_K(f_n) = K$. Calculer $[K : \mathbb{F}_p]$. Montrer que si K' est un autre corps de rupture de f_n , alors les corps $V_K(f_n)$ et $V_{K'}(f_n)$ sont isomorphes.

Notation : Le corps $V_K(f_n)$ est noté \mathbb{F}_{p^n} .

- Déduire de ce qui précède que tout corps fini est isomorphe à \mathbb{F}_{p^n} pour un certain premier p et un entier n .

Exercice 6. Quel est le corps de rupture de $X^4 - 3$ sur \mathbb{F}_5 ?



Exercice 7. Quel est le corps de rupture de $X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ sur \mathbb{F}_{19} ?