

1. Soit F un corps et soit $n > 0$ un entier qui n'est pas divisible par la caractéristique de F si cette caractéristique est non-nulle. Soit $a \in F$. Soient ω une n -ième racine d'unité primitive, et α une racine de $t^n - a$. Montrer que le corps de rupture de $t^n - a$ est $F(\alpha, \omega)$.
2. Trouver les corps de rupture des polynômes suivants sur \mathbf{Q} et trouver leur degré.
 - (a) $t^2 - 3$
 - (b) $(t^3 - 2)(t^2 + 1)$
 - (c) $t^6 - 2t^3 + 3$
3.
 - (a) Soient K un corps de caractéristique p et n un entier. Montrer que le polynôme $t^{p^n} - t$ n'a que des racines simples.
 - (b) Soit K un corps fini. Montrer qu'il existe un premier p et un entier n tels que K est un corps de rupture du polynôme $t^{p^n} - t \in \mathbf{F}_p[t]$. Remarquer de plus que K coïncide avec l'ensemble des zéros de $t^{p^n} - t$ dans K .
 - (c) Considérons le polynôme $f_n(t) = t^{p^n} - t$ sur $\mathbf{F}_p[t]$ et K un corps de rupture de f_n . Montrer que l'ensemble $V_K(f_n) = \{x \in K \mid f_n(x) = 0\}$ est un corps de p^n éléments, et que $\mathbf{F}_p \subset V_K(f_n)$. Remarquer que $V_K(f_n) = K$. Calculer $[K : \mathbf{F}_p]$. Montrer que si K' est un autre corps de rupture de f_n , alors les corps $V_K(f_n)$ et $V_{K'}(f_n)$ sont isomorphes.
 - (d) On désigne \mathbf{F}_{p^n} le corps $V_K(f_n)$. Dédurre de ce qui précède que tout corps fini est isomorphe à \mathbf{F}_{p^n} pour un certain premier p et un entier n .
4.
 - (a) Quel est le corps de rupture de $t^4 - 3$ sur \mathbf{F}_7 ?
 - (b) Quel est le corps de rupture de $t^3 + t^2 + t + 1$ sur \mathbf{F}_{13} ?
5.
 - (a) Soit E une extension du corps F . Soient $f(t) \in F[t]$ et $\sigma : E \rightarrow E$ un automorphisme qui fixe tout élément de F . Montrer que si $\alpha \in E$ est une racine de $f(t)$, alors $\sigma(\alpha)$ en est une aussi.
 - (b) Soit $f(t) \in \mathbf{Q}[t]$. Montrer que si $\alpha \in \mathbf{C}$ est une racine de $f(t)$ alors $\bar{\alpha}$, le conjugué de α , en est une aussi.