Série 14

Constructions à la règle et au compas

Exercice 1. Un nombre réel α est dit *constructible* si, à l'aide de la règle et du compas on peut construire un segment de longueur α. On suppose que l'on part d'une unité de mesure fixée.

a) Montrer que l'ensemble W des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Q}$.

b) Montrer que $\alpha \in \mathbb{R}$ est constructible si et seulement s'il existe des nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que $\lambda_i^2 \in \mathbb{Q}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1})$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ et $\alpha \in \mathbb{Q}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

c) Déduire de b) que si α est constructible alors il est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et que $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ est une puissance de 2.

d) Montrer que, étant donné un cube, il est impossible de construire à la règle et au compas un cube dont le volume est le double de celui de départ.

e) Montrer qu'il est impossible de trisecter $60°$ à la règle et au compas.

Groupes de Galois

Exercice 2. Trouver le groupe de Galois G de $\mathbb{E} = \mathbb{Q}(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ sur $\mathbb{Q}$. Trouver tous ses sous-groupes $H \leq G$ et identifier tous les sous-corps $\mathbb{E}^H$.

Exercice 3. Calculer le groupe de Galois du corps de rupture de $X^p - 1$ sur $\mathbb{Q}$ pour $p \in \mathbb{P}$.