

L'exercice 6 est à rendre le 2 mai au début de la séance d'exercices.

1. Trouver tous les sous-groupes de Sylow de S_3 .
2. Montrer que si $p > q$ sont des premiers tels que $p \not\equiv 1 \pmod q$, alors un groupe d'ordre pq est abélien (et donc cyclique). Que se passe-t-il si $p \equiv 1 \pmod q$?
3. Soit G un groupe fini.
 - (a) Montrer que si S est l'unique p -sous-groupe de Sylow de G , alors S est normal.
 - (b) On suppose que tous les sous-groupes de Sylow de G sont normaux. Montrer que G est le produit de ces sous-groupes.
4. Soit R l'ensemble des nombres $a + b\sqrt{2}$, où $a, b \in \mathbf{Q}$. Montrer que R est un corps.
5. Soit $\mathbf{Z}[i]$ le sous-ensemble des nombres complexes $a + bi$ avec $a, b \in \mathbf{Z}$. Trouver une factorisation non-triviale de 5 dans $\mathbf{Z}[i]$.
6. Soit R un anneau intègre.
 - (a) Soit $a \in R$, $a \neq 0$. Montrer que l'application $x \mapsto ax$ est une application injective $R \rightarrow R$.
 - (b) On suppose que R est, en plus, fini. Montrer que R est un corps.
7. Soit R un anneau. Un élément $x \in R$ est *nilpotent* s'il existe un entier $n > 0$ tel que $x^n = 0$. Montrer que $1 + x$ et $1 - x$ sont des unités si x est nilpotent.
8. Soit R un anneau non-commutatif. Supposons que $b \in R$ est un inverse à droite de $a \in R$, c'est-à-dire, que $ab = 1$. Montrer que si a possède un inverse à droite et R est fini, alors a est un unité de R .
9. Soit R un anneau, et soit $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ un groupe multiplicatif fini. L'anneau de groupe de G , noté $R[G]$, est l'ensemble des sommes formelles

$$a_1g_1 + a_2g_2 + \dots + a_ng_n \quad a_i \in R, \quad 1 \leq i \leq n.$$

L'addition est définie composant par composant :

$$\begin{aligned} (a_1g_1 + a_2g_2 + \dots + a_ng_n) + (b_1g_1 + b_2g_2 + \dots + b_ng_n) \\ = (a_1 + b_1)g_1 + (a_2 + b_2)g_2 + \dots + (a_n + b_n)g_n \end{aligned}$$

alors en tant que groupe abélien, $R[G] \cong R \oplus \dots \oplus R$. Pour la multiplication, on définit $(ag_i)(bg_j) = abg_k$, où $g_i g_j = g_k$, puis on l'étend en utilisant la distributivité. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i g_i \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j g_j \right) = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{g_i g_j = g_k} a_i b_j \right) g_k.$$

- (a) Montrer que $R[G]$ est un anneau.
- (b) Dans $\mathbf{Z}[S_3]$, on considère les éléments $\alpha = 1 - 3\tau$ et $\beta = -2 + \sigma - \tau$, où $\tau = (12)$ et $\sigma = (123)$. Calculer $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$, et $\beta\alpha$.
- (c) Montrer que si $G \neq \{e\}$, alors $R[G]$ contient des diviseurs de zéro.