Série 8

Exercice 1. On dit qu'un anneau commutatif R est *local* s'il ne possède qu'un seul idéal maximal.

a) Donner des exemples d'anneaux locaux.

b) Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

i) R est local,

ii) L'ensemble des éléments non inversibles de R est un idéal.

c) Soit R un anneau local. Montrer que si $x \in R$ alors $x \in R^*$ ou $1 - x \in R^*$. Montrer que les seuls idempotents de R sont 0 et 1.

Exercice 2. Soit R un anneau commutatif et I un idéal de R. On appelle *radical* de I l'ensemble $\sqrt{I} = \{x \in R \mid \text{ il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x^n \in I\}$.

a) Montrer que $\sqrt{I}$ est un idéal de R.

b) Dans $R = \mathbb{Z}$ calculer $\sqrt{9\mathbb{Z}}, \sqrt{12\mathbb{Z}}, \sqrt{72\mathbb{Z}}$ et $\sqrt{m\mathbb{Z}}$ où $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ les p_i étant des premiers distincts.

c) Montrer que $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J} = \sqrt{IJ}$ pour tous idéaux I, J de R.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier.

a) Décrire tous les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ainsi que leurs quotients.

b) Décrire tous les idéaux premiers de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

c) Montrer que le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$ est isomorphe à $\mathrm{Aut}(C_n)$.

Exercice 4. Soit X un espace topologique et $C(X, \mathbb{R})$ l'anneau des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$.

a) Pour tout $x \in X$ on pose $\mathfrak{m}_x = \{f \in C(X, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0\}$. Montrer que $\mathfrak{m}_x$ est un idéal maximal de $C(X, \mathbb{R})$.

b) Montrer que si X est compact, alors tout idéal maximal de $C(X, \mathbb{R})$ est égal à un $\mathfrak{m}_x$ pour un certain $x \in X$.

Exercice 5. Soit $\mathbb{Z}[i]$ l'anneau des entiers de Gauss.

a) Calculer $\mathbb{Z}[i]^*$ et donner sa structure de groupe.

b) Calculer $Q(\mathbb{Z}[i])$.

c) Trouver le pgcd de $11 + 7i$ et $18 - i$ dans $\mathbb{Z}[i]$.

d) Soient $d \in \mathbb{Z}$ et $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$. Montrer que

$$d \mid a + bi \text{ dans } \mathbb{Z}[i] \iff d \mid a \text{ et } d \mid b \text{ dans } \mathbb{Z}.$$

e) Montrer que 3 est un premier de $\mathbb{Z}[i]$, mais que 2 et 5 ne le sont pas.

Exercice 6. Soit R un anneau intègre et $\varphi : R \to R$ un homomorphisme injectif. Montrer qu'il existe un unique homomorphisme $\tilde{\varphi} : Q(R) \to Q(R)$ qui étend φ, i.e. tel que $\tilde{\varphi} \circ \iota_R = \iota_R \circ \varphi$. Montrer que si φ est un isomorphisme alors $\tilde{\varphi}$ en est aussi un.

Exercice 7. Soit R un anneau commutatif et $a, b \in R$

a) Définir la notion de ppmc de a et b (que l'on note $[a, b]$).

b) Montrer que si R est principal alors $[a, b]$ existe pour tous a, b et que de plus on a $(a, b)[a, b] = uab$ pour un certain $u \in R^*$.