Algèbre 2^e année | SÉRIE 8 | le 2 et le 3 avril 2005

L'exercice 5 est à rendre le 9 mai au début de la séance d'exercices.

1. Soit R un anneau commutatif et soient $I, J \subset R$ deux idéaux.
   (a) Montrer que $IJ \subset I \cap J$.
   (b) On appelle les idéaux I et J *premiers entre eux* si $I + J = R$. Montrer que $IJ = I \cap J$ si I et J sont premiers entre eux.
   (c) Trouver un exemple où $IJ \neq I \cap J$ si I et J ne sont pas premiers entre eux.
   (d) Montrer que l'homomorphisme canonique $R \to R/I \times R/J$ induit un isomorphisme $R/(I \cap J) \cong R/I \times R/J$.
2. (a) Montrer que $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un anneau intègre si et seulement si n est premier.
   (b) Soit p un premier. Montrer que $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un corps.
   (c) Soit p un premier. Si $a \not\equiv 0 \pmod{p}$, montrer que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
3. Trouver tout homomorphisme d'anneaux (a) $\mathbf{Z} \to \mathbf{Q}$, et (b) $\mathbf{Q} \to \mathbf{R}$.
4. Soit R un anneau commutatif. On appelle un homomorphisme de groupes abéliens $D : (R, +) \to (R, +)$ une *dérivation* s'il vérifie

$$D(xy) = D(x)y + xD(y)$$

   pour tout $x, y \in R$. Si $f, g : (R, +) \to (R, +)$ sont deux homomorphismes de groupes abéliens, on définit le *crochet commutateur*,

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f.$$

   Si D_1 et D_2 sont des dérivations, montrer que $[D_1, D_2]$ l'est aussi.
5. Soit S un ensemble non-vide. Soit R un anneau. On note $F(S, R)$ l'anneau des applications ensemblistes $S \to R$.
   (a) Supposons que R est intègre. L'anneau $F(S, R)$ est-il intègre ? Donner des exemples.
   (b) Si $\sharp(S) = n$, montrer que $F(S, R) \cong R^n$, le produit de n copies de R.
   (c) Décrire les éléments inversibles de $F(S, R)$.
   (d) Soit $X \subset S$ tel que $X \neq \varnothing$. On pose $\rho : F(S, R) \to F(X, R)$ l'application définie par "restriction", c-à-d que $\rho(f)$ est l'application f restreinte au domaine X. Montrer que ρ est un homomorphisme surjectif et calculer son noyau.
6. Soit K un corps fini de caractéristique p. Montrer que l'application $\xi : x \mapsto x^p$ est un automorphisme de K. *(L'application ξ s'appelle l'homomorphisme de Frobenius.)*