EPFL
Algèbre linéaire
1ère année
2006-2007

Corrigé de la série 1

Correction exercice 1

Preuve de la Proposition 1.4. *Soient $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ et $z_3 = a_3 + ib_3$ des nombres complexes où a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3 sont des nombres réels.*

1.
$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) && \text{par définition de la somme sur } \mathbb{C} \\ &= (a_2 + a_1) + i(b_2 + b_1) && \text{par commutativité de la somme sur } \mathbb{R} \\ &= z_2 + z_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2) && \text{par définition du produit sur } \mathbb{C} \\ &= (a_2a_1 - b_2b_1) + i(b_2a_1 + a_2b_1) && \text{par commutativité du produit sur } \mathbb{R} \\ &= z_2.z_1 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) + z_3 &= [(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2)] + (a_3 + ib_3) \\ &= [(a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)] + (a_3 + ib_3) && \text{par définition de la somme sur } \mathbb{C} \\ &= ((a_1 + a_2) + a_3) + i((b_1 + b_2) + b_3) && \text{par définition de la somme sur } \mathbb{C} \\ &= (a_1 + (a_2 + a_3)) + i(b_1 + (b_2 + b_3)) && \text{par associativité de la somme sur } \mathbb{R} \\ &= (a_1 + ib_1) + [(a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3)] && \text{par définition de la somme sur } \mathbb{C} \\ &= z_1 + (z_2 + z_3) \end{aligned}$$

La relation $(z_1.z_2).z_3 = z_1.(z_2.z_3)$ se démontre de manière similaire en utilisant l'associativité du produit sur $\mathbb{R}$.

3. *Même type de raisonnement en utilisant les éléments neutres additifs et multiplicatifs sur $\mathbb{R}$.*
4.
$$(a_1 + ib_1) + (-a_1 - ib_1) = 0$$

5. – *Solution 1 : En utilisant des calculs similaires à ceux des points précédents.*
   – *Solution 2 "économique" : On sait que : $z_1.\bar{z}_1 = |z_1|^2$ (voir Définition* 1.5*). Pour $z_1 \neq 0$, on a $|z_1| \neq 0$, par conséquent :*
   $$z_1.\frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2} = 1$$
   d'où $w_1 = \frac{\bar{z}_1}{|z_1|^2}$.
6. *Même type de raisonnement en utilisant la distributivité sur $\mathbb{R}$.*

Preuve de la Proposition 2.4 (2)
Soit p un polynôme à coefficients réels et notons n son degré :

$$p(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$$

pour $a_0, a_1, \dots, a_n$ des nombres réels. Le nombre complexe λ étant une racine de p, on a :

$$p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n = 0.$$

En prenant le conjugué de cette égalité, on obtient :

$$\overline{a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_n\lambda^n} = \overline{0}.$$

Par les points (5) et (6) de la Proposition 1.6 on obtient :

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\overline{\lambda} + \ldots + \overline{a_n}\overline{\lambda^n} = \overline{0}.$$

Or, pour un nombre réel α, on a $\bar{\alpha} = \alpha$, d'où :

$$a_0 + a_1\overline{\lambda} + \ldots + a_n\overline{\lambda^n} = 0.$$

La quantité de gauche n'étant autre que $p(\overline{\lambda})$ on en déduit que $\overline{\lambda}$ est racine de p.

Correction exercice 2 *Le principe général pour résoudre ce type d'exercice est d'utiliser la relation $z.\bar{z} = |z|^2 \in \mathbb{R}$ afin d'avoir un nombre réel au dénominateur.*

$$\frac{-2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{-2(1+i\sqrt{3})}{(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})} = \frac{-2-i2\sqrt{3}}{1+3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)} = -\frac{3}{5} + i\frac{4}{5}$$

Correction exercice 3 *Soit $z = a + ib$, où a et b sont réels, une racine carrée de $3 - 4i$*

$$z^2 = (a+ib)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = 3 - 4i$$

d'où

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4. \end{cases}$$

D'après la deuxième équation du système, $a \neq 0$, d'où $b = -\frac{2}{a}$ et donc, par la première équation, $a^2 - \frac{4}{a^2} = 3$ et donc

$$a^4 - 3a^2 - 4 = 0.$$

Par un calcul de discriminant on obtient $a^2 = 4$ (a^2 étant un réel positif, la solution -1 est exclue) et donc $a = 2$ ou $a = -2$. On en déduit que les racines carrées de $3 - 4i$ sont $2 - i$ et $-2 + i$.
Par un calcul similaire on obtient que les racines carrées de $24 - 10i$ sont $5 - i$ et $-5 + i$.
(On peut remarquer que si λ est une racine du polynôme $X^2 = z$, où z est un nombre complexe, alors $-\lambda$ est également une racine.)

Correction exercice 4 *Par la proposition 2.8, les racines du polynôme $p(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2$ sont*

$$\frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}.$$

Il s'agit donc, pour chacune des deux équations de l'énoncé, de calculer la racine carrée du discriminant.

Pour la première équation, par la méthode de l'exercice précédent, on calcule les racines carrées $\lambda, -\lambda$ de $z = 3 + 4i$. On obtient : $\lambda = 2 + i$. D'où les deux solutions de l'équation :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 - \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + \frac{1}{2}i.$$

Pour la deuxième équation, le discriminant du polynôme de degré 2 en z^2 est $-12 = 12i^2$. Par conséquent, $z^2 = -1 \pm \sqrt{3}i$. Par la méthode de l'exercice précédent, on calcule les racines carrées de $-1 \pm \sqrt{3}i$. On obtient les solutions suivantes :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i,\ -(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i),\ \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i, -(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i).$$

(On peut remarquer que le polynôme est pair et appliquer le (2)b de l'exercice 7 pour obtenir que si λ est une racine de P, $\bar{\lambda}$, $-\lambda$ et $-\bar{\lambda}$ sont également racines de P.)

Correction exercice 5

1. *On vérifie facilement que $P(i) = 0$.*
2. *D'après le point (2) de la Proposition 2.4, $-i$ est également racine de P. Par conséquent, le polynôme P est divisible par $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$. En effectuant une division euclidienne, (ou par identification) on obtient :*

   $$P(X) = (X^2 + 1)(X^2 - 2X + 2).$$

   On vérifie que le discriminant des polynômes $X^2 + 1$ et $X^2 - 2X + 2$ est négatif. On en déduit que ces polynômes sont irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$.

Correction exercice 6

1. *On cherche les racines complexes du polynôme. Le discriminant du polynôme de degré 2 en X^2 est $-3 = 3i^2$. On en déduit que $z^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ où z est une racine de P. Il reste à calculer les racines carrées de $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. On trouve les racines :*

   $$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i),\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i).$$

   (On peut remarquer que le polynôme est pair.)
   En notant $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ on en déduit la décomposition suivante de P dans $\mathbb{C}[X|$:

   $$P(X) = (X - \lambda)(X - \bar{\lambda})(X + \lambda)(X + \bar{\lambda}).$$

   Pour obtenir la décompostion de P dans $\mathbb{R}[X]$ on regroupe les racines conjuguées deux à deux :

   $$(X - \lambda)(X - \bar{\lambda}) = X^2 - 2\mathrm{Re}(\lambda) + |\lambda|^2 = X^2 - X + 1$$

   et

   $$(X + \lambda)(X + \bar{\lambda}) = X^2 + 2\mathrm{Re}(\lambda) + |\lambda|^2 = X^2 + X + 1$$

   d'où la décomposition suivante de P dans $\mathbb{R}[X|$:

   $$P(X) = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1).$$

   (On pourra comparer λ au nombre j introduit à l'exercice 7.)

2. *On remarque que i (et donc aussi $-i$ par le point* (2) *de la Proposition* 2.4*) est racine de Q. On en déduit que :*
$$Q(X) = (X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1).$$
Par des calculs et raisonnements similaires à ceux du point précédent on obtient les racines du polynôme $X^4 - X^2 + 1$: λ, $\bar{\lambda}$, $-\lambda$ et $-\bar{\lambda}$ où $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. On en déduit la décomposition suivante de Q dans $\mathbb{C}[X]$:
$$Q(X) = (X - i)(X + i)(X - \lambda)(X - \bar{\lambda})(X + \lambda)(X + \bar{\lambda})$$
et la décomposition suivante de Q dans $\mathbb{R}[X]$:
$$Q(X) = (X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1).$$

Correction exercice 7 *1. (a)* $|j| = 1$

(b) On obtient par calcul que $j^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$. On en déduit que :
$$j^3 = j.j^2 = j.\bar{j} = |j|^2 = 1$$
et
$$1 + j + j^2 = 1 + j + \bar{j} = 1 + 2\mathrm{Re}(j) = 0.$$

2. *(a) On vérifie facilement que $P(j) = 0$, $P'(j) = 0$ et $P''(j) \neq 0$ où $P'(X) = 8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X$ et $P''(X) = 56X^6 + 60X^4 + 36X^2 + 4$. On en déduit que j est racine d'ordre* 2 *de P.*

   (b) Le polynôme P étant pair (i.e. de la forme $\sum a_{2n}X^{2n}$) on a que si λ est une racine de P alors $-\lambda$ est une racine de P. (Ce résultat généralise la remarque à la fin de la correction de l'exercice 3.)

   (c) Par le point (2) *de la Proposition* 2.4 *on a que $\bar{j}$ est racine d'ordre 2 de P. On déduit, alors, du point précédent que $-j$ et $-\bar{j}$ sont racines d'ordre 2 de P. Par conséquent, on a la décomposition suivante de P dans $\mathbb{C}[X]$:*
$$P(X) = (X - j)^2(X - \bar{j})^2(X + j)^2(X + \bar{j})^2.$$
   Pour obtenir la décompostion de P dans $\mathbb{R}[X]$ on regroupe les racines conjuguées deux à deux :
$$(X - j)(X - \bar{j}) = X^2 - (j + \bar{j})X + j.\bar{j} = X^2 + X + 1$$
   et
$$(X + j)(X + \bar{j}) = X^2 + (j + \bar{j})X + j.\bar{j} = X^2 - X + 1$$
   d'où la décomposition suivante de P dans $\mathbb{R}[X]$:
$$P(X) = (X^2 + X + 1)^2(X^2 - X + 1)^2.$$