

Corrigé de la série 19

Correction exercice 1

Montrons que $W \subset (W^\perp)^\perp$.

Soit $w \in W$, comme $\forall x \in W^\perp, \langle x, w \rangle = 0$, on a $w \in (W^\perp)^\perp$.

De plus, $\dim((W^\perp)^\perp) = \dim(V) - \dim(W^\perp) = \dim(V) - (\dim(V) - \dim(W)) = \dim(W)$.
D'où l'égalité.

Correction exercice 2

Soit $\{f_1, \dots, f_n\}$ une base de F que l'on complète par les vecteurs $\{e_1, \dots, e_k\}$ de E pour obtenir une base de E . D'après le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, il existe une base orthonormée de F , $\{f'_1, \dots, f'_n\}$ telle que

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \text{Span}(f'_1, \dots, f'_j) = \text{Span}(f_1, \dots, f_j).$$

En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\{f_1, \dots, f_n, e_1, \dots, e_p\}$ de E , on obtient une base orthonormée de E , $\{f'_1, \dots, f'_n, e'_1, \dots, e'_p\}$ telle que

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \text{Span}(f'_1, \dots, f'_j) = \text{Span}(f_1, \dots, f_j)$$

et

$$\forall p \in \{1, \dots, k\} \quad \text{Span}(f'_1, \dots, f'_n, e'_1, \dots, e'_p) = \text{Span}(f_1, \dots, f_n, e_1, \dots, e_p).$$

La base orthonormée $\{f'_1, \dots, f'_n\}$ de F est donc incluse dans la base orthonormée $\{f'_1, \dots, f'_n, e'_1, \dots, e'_p\}$ de E .

Correction exercice 3

La réponse est non, une matrice diagonalisable n'admet pas forcément une base orthonormée de vecteurs propres, comme le montre l'exemple suivant.

Soit $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $T(1, 0) = 2(1, 0)$ et $T(1, 1) = 3(1, 1)$. Dans la base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ de \mathbb{R}^2 on a

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si on orthonormalise cette base de vecteurs propres par le procédé de Gram-Schmidt on obtient : $f_1 = (1, 0)$ et $f_2 = (0, 1)$ mais f_2 n'est pas un vecteur propre de T car $T(f_2) = T((1, 1) - (1, 0)) = 3(1, 1) - 2(1, 0) = (1, 3) = f_1 + 3f_2$.

Correction exercice 4

Nous allons montrer le résultat suivant, équivalent à celui de l'énoncé :

les colonnes de A sont linéairement dépendantes si et seulement si $A^t A$ n'est pas inversible.

Soit \mathbf{v}_i la i -ième colonne de A , $1 \leq i \leq n$. On considère \mathbf{v}_i comme vecteur colonne dans \mathbb{R}^m . Supposons que $(\mathbf{v}_1 \dots \mathbf{v}_n)$ est linéairement dépendante. Alors il existe $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, non tous nuls, tels que $b_1 \mathbf{v}_1 + \dots + b_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. Autrement dit,

$$A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}.$$

On pose $\mathbf{b} = (b_1 \cdots b_n)^t \in \mathbb{R}^n$. Alors $A^t \mathbf{A} \mathbf{b} = A^t \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Puisque $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, $A^t A$ n'est pas inversible. Réciproquement, supposons que $A^t A$ n'est pas inversible. En particulier, elle n'est pas injective. Alors il existe $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, tel que $A^t \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Donc,

$$0 = \langle A^t \mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{A} \mathbf{u}, \mathbf{A} \mathbf{u} \rangle.$$

Alors $\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (puisque un produit scalaire est défini positif). Donc les colonnes de A ne sont pas linéairement indépendantes.

Correction exercice 5

1. On applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base $\{1, t\}$ de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

On considère le vecteur 1. On a $\|1\|^2 = 2$ d'où : $P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

En posant $E_1 = \text{Span}(P_1)$ on a :

$$P_2 = \frac{t - p_{E_1}(t)}{\|t - p_{E_1}(t)\|}.$$

On montre que $p_{E_1}(t) = 0$ et $\|t\|^2 = \frac{2}{3}$, d'où $P_2 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} t$.

2. On a

$$\langle f_0, P_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e - e^{-1}).$$

par une intégration par parties on obtient que

$$\langle f_0, P_2 \rangle = \sqrt{6}e^{-1}$$

et enfin

$$\|f_0\|^2 = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}).$$

On a $\int_{-1}^1 (e^t - at - b)^2 dt = \|e^t - (at + b)\|^2$ or, d'après le théorème de meilleure approximation

$$\forall at + b \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \quad \|e^t - p_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})}(e^t)\| \leq \|e^t - (at + b)\|.$$

Donc $\alpha = \|e^t - p_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})}(e^t)\|^2$. Comme $e^t - p_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})}(e^t)$ et $p_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})}(e^t)$ sont orthogonaux, on a d'après le théorème de Pythagore

$$\alpha = \|f_0\|^2 - \|p_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})}(e^t)\|^2$$

et comme P_1 et P_2 forment une base orthonormée de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ on a $p_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})}(f_0) = \langle f_0, P_1 \rangle P_1 + \langle f_0, P_2 \rangle P_2$. En appliquant, de nouveau, le théorème de Pythagore on obtient

$$\|p_{\mathcal{P}_1(\mathbb{R})}(e^t)\|^2 = \langle f_0, P_1 \rangle^2 + \langle f_0, P_2 \rangle^2.$$

On en déduit que

$$\alpha = \|f_0\|^2 - \langle f_0, P_1 \rangle^2 - \langle f_0, P_2 \rangle^2.$$

Soit

$$\alpha = \frac{1}{2}(e^2 - e^{-2}) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e - e^{-1})\right)^2 - (\sqrt{6}e^{-1})^2 = -7e^{-2} + 1.$$

3. On orthonormalise $\{1, t, t^2\}$ par Gram-Schmidt. En posant $E_2 = \text{Span}(P_1, P_2)$ on a :

$$P_3 = \frac{t^2 - p_{E_2}(t^2)}{\|t^2 - p_{E_2}(t^2)\|}.$$

On a $p_{E_2}(t^2) = \langle t^2, P_1 \rangle P_1 + \langle t^2, P_2 \rangle P_2 = \langle t^2, 1 \rangle \frac{1}{2} + \langle t^2, t \rangle \frac{3}{2}t = 2$.

On obtient $\|t^2 - 2\|^2 = \frac{86}{15}$. D'où

$$P_3 = \sqrt{\frac{15}{86}}(t^2 - 2).$$

De même qu'au point précédent on montre que $\alpha' = \|e^t - p_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}(e^t)\|^2$ et par le théorème de Pythagore

$$\alpha' = \|f_0\|^2 - \|p_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}(e^t)\|^2$$

comme P_1, P_2 et P_3 forment une base orthonormée de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ on a $p_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}(f_0) = \langle f_0, P_1 \rangle P_1 + \langle f_0, P_2 \rangle P_2 + \langle f_0, P_3 \rangle P_3$. En appliquant, de nouveau, le théorème de Pythagore on obtient

$$\|p_{\mathcal{P}_2(\mathbb{R})}(e^t)\|^2 = \langle f_0, P_1 \rangle^2 + \langle f_0, P_2 \rangle^2 + \langle f_0, P_3 \rangle^2.$$

On en déduit que

$$\alpha' = \|f_0\|^2 - \langle f_0, P_1 \rangle^2 - \langle f_0, P_2 \rangle^2 - \langle f_0, P_3 \rangle^2.$$

On laisse le lecteur faire le calcul de $\langle f_0, P_3 \rangle$ par intégrations par parties.

Correction exercice 6

1. La première équation fournit l'égalité $y = x - 2$. En substituant dans la deuxième équation on obtient :

$$2x + 3x - 6 = -1.$$

Soit $x = 1$. En substituant dans la troisième équation, on obtient :

$$4x + 5x - 10 = 5.$$

Soit $x = \frac{15}{3}$, ce qui est en contradiction avec l'égalité $x = 1$. Le système est donc incompatible.

2. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Le système normal associé au système $Ax = b$ est

le système $A^t Ax = A^t b$. Les vecteurs colonnes de A étant linéairement indépendantes on sait, d'après l'exercice 4 que la matrice $A^t A$ est inversible et on obtient dans ce cas que le système normal admet pour unique solution $x = (A^t A)^{-1} A^t b$.

On a $A^t A = \begin{pmatrix} 21 & 25 \\ 25 & 35 \end{pmatrix}$ d'où $(A^t A)^{-1} = \frac{1}{21 \times 35 - 25 \times 25} \begin{pmatrix} 35 & -25 \\ -25 & 21 \end{pmatrix} = \frac{1}{110} \begin{pmatrix} 35 & -25 \\ -25 & 21 \end{pmatrix}$ et

$A^t b = \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix}$. D'où $x = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 20 \\ -8 \end{pmatrix}$.