

Corrigé de la série 27

Correction exercice 1

En notant C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes du déterminant, on constate que

$$C_2 - C_1 = C_4 - C_3 = C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

or, comme le déterminant est une forme multilinéaire et alternée, on a :

$$\det(C_1, C_2, C_3, C_4) = \det(C_1, C_2 - C_1, C_3, C_4 - C_3) = \det(C_1, C, C_3, C) = 0.$$

Correction exercice 2

1. Comme le déterminant est une forme multilinéaire et alternée, on obtient

$$\begin{aligned} \det(C_1 + C_2, C_2 + C_3, \dots, C_i + C_{i+1}, \dots, C_n + C_1) &= \det(C_1, C_2, \dots, C_n) + \det(C_2, C_3, \dots, C_n, C_1) \\ &= \det(C_1, C_2, \dots, C_n) + \epsilon(\sigma) \det(C_1, C_2, \dots, C_n) \end{aligned}$$

où ϵ désigne la signature et σ est la permutation telle que $\sigma(i) = i + 1$ pour $1 \leq i \leq n - 1$ et $\sigma(n) = 1$. On a $\epsilon(\sigma) = (-1)^{n+1}$.

On en déduit que

$$\det(C_1 + C_2, C_2 + C_3, \dots, C_i + C_{i+1}, \dots, C_n + C_1) = 0 \text{ pour } n \text{ pair}$$

et

$$\det(C_1 + C_2, C_2 + C_3, \dots, C_i + C_{i+1}, \dots, C_n + C_1) = 2 \det(C_1, C_2, \dots, C_n) \text{ pour } n \text{ impair}$$

2. Par multilinéarité on a

$$\det(C_1 + \dots + C_n, C_2, \dots, C_n) = \sum_{i=1}^n \det(C_i, C_2, \dots, C_n)$$

le déterminant étant une forme alternée, le seul terme non nul de la somme précédente est celui correspond au cas $i = 1$ d'où

$$\det(C_1 + \dots + C_n, C_2, \dots, C_n) = \det(C_1, C_2, \dots, C_n).$$

Application

On note C_i les colonnes du déterminant à calculer. On a

$$C_1 + \dots + C_n = (a + (n - 1)b) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix} = (a + (n - 1)b)C$$

d'où

$$\begin{aligned} \det(C_1, C_2, \dots, C_n) &= \det(C_1 + \dots + C_n, C_2, \dots, C_n) \\ &= \det((a + (n-1)b)C, C_2, \dots, C_n) = (a + (n-1)b)\det(C, C_2, \dots, C_n) \end{aligned}$$

Il nous reste à calculer

$$\det(C, C_2, \dots, C_n) = \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 1 & a & b & \dots & b \\ 1 & b & a & \dots & b \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

En remplaçant la ligne L_i par $L_i - L_1$ pour $2 \leq i \leq n$ on obtient

$$\det(C, C_2, \dots, C_n) = \begin{vmatrix} 1 & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

Le déterminant d'une matrice triangulaire étant égal au produit des termes sur la diagonale, on obtient

$$\det(C_1, C_2, \dots, C_n) = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

Correction exercice 3

C'EST FAUX!

Prendre, par exemple, les endomorphismes de \mathbb{R}^2 ayant pour matrices dans la base canonique $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction exercice 4

On a

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ B-A & A-B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & B \\ 0 & A-B \end{vmatrix}$$

où la première égalité est obtenue en remplaçant, dans le déterminant par blocs, la ligne L_2 par $L_2 - L_1$ et la deuxième égalité est obtenue en remplaçant la colonne C_1 par $C_1 + C_2$. On peut alors appliquer le résultat du cours donnant le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs pour obtenir

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B) \cdot \det(A-B)$$

Correction exercice 5

Supposons que $abc \neq 0$ et partons du déterminant de gauche. En remplaçant C_2 par aC_2 , C_3 par bC_3 et C_4 par cC_4 on obtient :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & 0 & bc^2 & cb^2 \\ 1 & ac^2 & 0 & ca^2 \\ 1 & ab^2 & ba^2 & 0 \end{vmatrix}$$

En remplaçant L_2 par $\frac{1}{bc}L_2$, L_3 par $\frac{1}{ac}L_3$ et L_4 par $\frac{1}{ab}L_4$ on obtient :

$$\frac{1}{abc} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & 0 & bc^2 & cb^2 \\ 1 & ac^2 & 0 & ca^2 \\ 1 & ab^2 & ba^2 & 0 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ \frac{1}{bc} & 0 & c & b \\ \frac{1}{ac} & c & 0 & a \\ \frac{1}{ab} & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

En remplaçant C_1 par $abcC_1$ on obtient :

$$abc \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ \frac{1}{bc} & 0 & c & b \\ \frac{1}{ac} & c & 0 & a \\ \frac{1}{ab} & b & a & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

Les cas où $abc = 0$ se traitent de manière similaire et sont laissés au lecteur.

Correction exercice 6

(Remarque : Comme $P(0) = \det(A) \neq 0$, la matrice A est inversible et cela a donc un sens de parler du polynôme caractéristique de A^{-1} .)

Soit $R(X)$ le polynôme caractéristique de A^{-1} . On a

$$R(X) = \det(A^{-1} - XI).$$

Or, $A^{-1} - XI = A^{-1}(I - XA)$. Comme $\det(A) \neq 0$, 0 n'est pas valeur propre et on peut donc écrire $A^{-1} - XI = (-X)A^{-1}(A - \frac{1}{X}I)$. On a donc

$$\begin{aligned} R(X) &= \det((-X)A^{-1}(A - \frac{1}{X}I)) = (-1)^n X^n \det(A^{-1}(A - \frac{1}{X}I)) \\ &= (-1)^n X^n \det(A^{-1}) \det(A - \frac{1}{X}I) = (-1)^n X^n \det(A^{-1}) P(\frac{1}{X}) \end{aligned}$$

où la première égalité découle de la multilinéarité du déterminant, la seconde de la propriété suivante du déterminant $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ et la dernière de la caractérisation du polynôme caractéristique. Comme $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{P(0)}$ on obtient

$$R(X) = \frac{(-1)^n X^n}{P(0)} P(\frac{1}{X}).$$

Correction exercice 7

Par hypothèse, il existe $v \in V$ tel que $T^{n-2}v \neq 0$ et $T^{n-1}v = 0$. En adaptant la preuve de l'exercice 3 de la série 8, $(v, Tv, \dots, T^{n-2}v)$ est linéairement indépendante. Soit $w \in V$, $w \notin \text{span}(v, \dots, T^{n-2}v)$. Alors $B = (v, \dots, T^{n-2}v, w)$ est une base de V , et

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, le polynôme caractéristique de T est $(x-0)^{n-1}(x-\lambda) = x^{n-1}(x-\lambda)$. Si $\lambda = 0$, T a une valeur propre ; sinon, il en a deux.

Correction exercice 8

On pose $U = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \mid p(0) = 0, p'(0) = 0\}$. On vérifie que U est un sous-espace de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$; en fait, si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ alors $p(0) = 0$ ssi $a_0 = 0$ et $p'(0) = 0$ ssi $a_1 = 0$. Donc $U = \text{span}(x^2, x^3)$. Il faut trouver une base orthonormale de U par rapport au produit scalaire $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$. Mais l'on remarque que $\langle x^2, x^3 \rangle = 0$, donc il suffit de normaliser les deux polynômes. Or, $\langle x^2, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 x^4 dx = 2/5$ et $\langle x^3, x^3 \rangle = \int_{-1}^1 x^6 dx = 2/7$. Donc on pose $p_1(x) = \sqrt{5/2}x^2$ et $p_2(x) = \sqrt{7/2}x^3$; alors (p_1, p_2) est une base orthonormale de U .
Le polynôme que l'on cherche est la projection orthogonale de $2 + 3x$ dans U :

$$\begin{aligned} p(x) &= (5/2)\langle 2 + 3x, x^2 \rangle x^2 (7/2)\langle 2 + 3x, x^3 \rangle x^3 \\ &= (5/2)(4/3)x^2 + (7/2)(6/5)x^3 \\ &= (10/3)x^2 + (21/5)x^3, \end{aligned}$$

car $\langle 2 + 3x, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 (2x^2 + 3x^3)dx = 4/3$ et $\langle 2 + 3x, x^3 \rangle = \int_{-1}^1 (2x^3 + 3x^4)dx = 6/5$.