EPFL
Algèbre linéaire
1ère année
2006-2007

Corrigé de la série 6

Correction exercice 1
On montre, par les raisonnements habituels, que x_1, x_2 et x_3 forment une famille linéairement indépendante et génératrice de $\mathbb{R}^3$. On a : $x = (1,1,1) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3)$.

Correction exercice 2
Soit E l'espace vectoriel défini dans l'énoncé. Un élément de E s'écrit sous la forme :

$$(x, y, -x-y) = x(1,0,-1) + y(0,1,-1)$$

pour x et y dans $\mathbb{R}$. On en déduit que $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$ forment une famille génératrice de E. On vérifie facilement que ces deux vecteurs sont linéairement indépendants.

Correction exercice 3
On vérifie que la famille $\{\vec{v_4}, \vec{v_5}\}$ est linéairemement indépendante. C'est donc une base de G.
On vérifie que la famille $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}\}$ est linéairemement indépendante (faites le !). C'est donc une base de F.
Pour $F+G$ on montre que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_5}\}$ est une base. (En étudiant les combinaisons linéaires de la famille $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}, \vec{v_5}\}$, on constate que $\vec{v_1} - \vec{v_2} = -\vec{v_4}$. Ou bien, on part de la famille génératrice $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}, \vec{v_5}\}$ de $F+G$ et on utilise le processus utilisé dans la preuve du Théorème du ballon donnée dans le cours, pour extraire une base de cette famille.)
On vérifie que la famille $\{\vec{v_4}\}$ est une base de l'espace $F \cap G$.

Correction exercice 4

1. *Montrons que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_5(\mathbb{F})$.*
   - *Le polynôme nul est dans E_1.*
   - *Soient P et Q deux éléments de E_1 : $(P+Q)(0) = P(0) + Q(0) = 0$. D'où $P + Q \in E_1$.*
   - *Pour $\lambda \in \mathbb{F}$ on montre que $\lambda P \in E_1$.*

   On montre, de même, que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_5(\mathbb{F})$.
2. *On rappelle que la base canonique de $\mathcal{P}_5(\mathbb{F})$ est la famille $\{1, X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$.*
   On laisse le lecteur vérifier qu'une base de E_1 est donnée par $\{X, X^2, X^3, X^4, X^5\}$.
   Un vecteur de E_2 s'écrit sous la forme : $(1+X^2)(a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)$ ce qui donne, après développement :

   $$a_0(1+X^2) + a_1(X+X^3) + a_2(X^2+X^4) + a_3(X^3+X^5).$$

   On en déduit que la famille $\{1+X^2, X+X^3, X^2+X^4, X^3+X^5\}$ est une famille génératrice de E_2. On laisse le soin au lecteur de vérifier qu'il s'agit d'une famille linéairement indépendante de E_2.
   Enfin, une base de l'espace vectoriel $E_1 \cap E_2$ est donnée par la famille $\{X + X^3, X^2 + X^4, X^3 + X^5\}$ car un vecteur de cet espace s'écrit sous la forme : $(1+X^2)(a_1X + a_2X^2 + a_3X^3)$.

Correction exercice 5
Après avoir constaté (plus ou moins rapidement...) qu'on a la relation de dépendance linéaire suivante : $f_3 + f_4 = f_2$ *on montre l'indépendance linéaire de la famille* $\{f_1, f_3, f_4\}$*.*
Soient α*,* β *et* γ *des scalaires de* $\mathbb{R}$ *tels que*

$$\alpha f_1 + \beta f_3 + \gamma f_4 = 0.$$

On prenant les valeurs prises par cette égalité en trois points de l'ensemble de définition des fonctions (par exemple : $x = 0, \frac{1}{2}$ *et* $\frac{-1}{2}$*) on obtient un système de trois équations à trois inconnues ayant pour unique solution* $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$*. On en déduit que la famille* $\{f_1, f_3, f_4\}$ *forme une base du sous-espace vectoriel de* $\mathcal{F}(]-1, 1[, \mathbb{R})$ *engendré par les vecteurs* f_1*,* f_2*,* f_3 *et* f_4*.*

Correction exercice 6

1. *Soient* (a, b) et (a', b') *des éléments de* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$*,* λ *et* μ *des scalaires dans* $\mathbb{R}$*.*
   - *On a :* $(a, b) + (a', b') = (aa', b + b') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
   - *Elément neutre pour l'addition :* $(a, b) + (1, 0) = (a, b)$
     (On fera donc très attention au fait que le vecteur nul dans cet espace vectoriel est le vecteur $\vec{0} = (1, 0)$*.)*
   - *Inverse additif :*
     $$(a, b) + (\frac{1}{a}, -b) = (1, 0)$$
   - *On a :* $\lambda.(a, b) = (a^\lambda, \lambda b)$*. Comme* $a \in \mathbb{R}_+^*$ *on a* $a^\lambda > 0$ *et donc* $\lambda.(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$*.*
   - *On a* $(\lambda + \mu).(a, b) = (a^{\lambda+\mu}, (\lambda + \mu)b)$ *et* $\lambda.(a, b) + \mu.(a, b) = (a^\lambda, \lambda b) + (a^\mu, \mu b) = (a^\lambda a^\mu, \lambda b + \mu b)$*. D'où* $(\lambda + \mu).(a, b) = \lambda.(a, b) + \mu.(a, b)$*.*
   - *On a* $\lambda.((a, b) + (a', b')) = \lambda.(aa', b + b') = ((aa')^\lambda, \lambda(b + b'))$ *et* $\lambda.(a, b) + \lambda.(a', b') = (a^\lambda, \lambda b) + (a'^\lambda, \lambda b') = (a^\lambda a'^\lambda, \lambda b + \lambda b')$*.*
     D'où $\lambda.((a, b) + (a', b')) = \lambda.(a, b) + \lambda.(a', b')$*.*
   - *On a* $\lambda.(\mu.(a, b)) = \lambda.(a^\mu, \mu b) = ((a^\mu)^\lambda, \lambda\mu b)$ *et* $(\lambda\mu).(a, b) = (a^{\lambda\mu}, \lambda\mu b)$*.*
     D'où $\lambda.(\mu.(a, b)) = (\lambda\mu).(a, b)$*.*
2. - $\{(1, 0), (1, 1)\}$
     Une liste contenant le vecteur nul n'est jamais linéairement indépendante car $\lambda\vec{0} = \vec{0}$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Or on a vu que dans* E*,* $\vec{0} = (1, 0)$*.*
   - $\{(2, 1), (8, 3)\}$
     On a : $(8, 3) = 3.(2, 1)$*. Par conséquent les deux vecteurs* $(8, 3)$ *et* $(2, 1)$ *sont liés (i.e. linéairement dépendants)*
   - $\{(2, 1), (6, 3)\}$
     Soient α *et* β *deux scalaires de* $\mathbb{R}$ *tels que*
     $$\alpha.(2, 1) + \beta.(6, 3) = \vec{0} = (1, 0). \quad (*)$$
     On a :
     $$\alpha.(2, 1) + \beta.(6, 3) = (2^\alpha, \alpha) + (6^\beta, 3\beta) = (2^\alpha 2^\beta 3^\beta, \alpha + 3\beta) = (2^{\alpha+\beta}3^\beta, \alpha + 3\beta).$$
     Par conséquent, l'égalité $(*)$ *se récrit :* $(2^{\alpha+\beta}3^\beta, \alpha + 3\beta) = (1, 0)$ *ce qui fournit les deux égalités suivantes :*
     $$2^{\alpha+\beta}3^\beta = 1 \qquad \text{et} \qquad \alpha + 3\beta = 0.$$
     Le logarithme de la première équation fournit l'égalité $\alpha ln(2) + \beta(ln(2) + ln(3)) = 0$*.*
     On déduit $\alpha = \beta = 0$*.*

3. – *Montrons que b est une famille linéairemement indépendante de E.*
Soient α *et* β *deux scalaires de* $\mathbb{R}$ *tels que*

$$\alpha.(2,0) + \beta.(2,1) = \vec{0} = (1,0). \quad (*)$$

On a :

$$\alpha.(2,0) + \beta.(2,1) = (2^{\alpha}, 0) + (2^{\beta}, \beta) = (2^{\alpha}2^{\beta}, \beta) = (2^{\alpha+\beta}, \beta).$$

Par conséquent, l'égalité $(*)$ *se récrit :*

$$(2^{\alpha+\beta}, \beta) = (1,0)$$

ce qui fournit les deux égalités suivantes :

$$2^{\alpha+\beta} = 1 \qquad \text{et} \qquad \beta = 0$$

dont on déduit $\alpha = \beta = 0$.

– *Montrons que b est une famille génératrice de E. Pour cela, il suffit de donner la décomposition d'un vecteur quelconque de E,* $v = (x, y)$ *en fonction des deux vecteurs* $(2,0)$ *et* $(2,1)$. *On cherche donc les valeurs de* α *et* β *telles que*

$$(x,y) = \alpha.(2,0) + \beta.(2,1).$$

Or, $\alpha.(2,0) + \beta.(2,1) = (2^{\alpha}, 0) + (2^{\beta}, \beta) = (2^{\alpha+\beta}, \beta)$. *Par conséquent, on obtient, par identification*

$$x = 2^{\alpha+\beta} \qquad \text{et} \qquad y = \beta.$$

En prenant le logarithme de la première équation, on obtient : $ln(x) = (\alpha+\beta)ln(2)$ *dont on déduit que* $\alpha = \frac{ln(x)}{ln(2)} - \beta = \frac{ln(x)}{ln(2)} - y$. *Par conséquent :*

$$(x,y) = (\frac{ln(x)}{ln(2)} - y).(2,0) + y.(2,1).$$