

Corrigé de la série 9

Correction exercice 1

1. On vérifie que T est linéaire.

Pour P et Q dans $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ on a :

$$T(P+Q) = P+Q + (P+Q)' + (P+Q)'' = P+Q + P' + Q' + P'' + Q'' = T(P) + T(Q).$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $T(\lambda P) = \lambda P + (\lambda P)' + (\lambda P)'' = \lambda P + \lambda P' + \lambda P'' = \lambda T(P)$.

2. Pour montrer que T est injective, nous allons montrer que son noyau est réduit à zéro.

$$\text{Ker}(T) = \{P \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \mid P + P' + P'' = 0\}.$$

Soit $P \in \text{Ker}(T)$. Pour montrer que $P = 0$ on peut procéder de deux manières :

– Soit on écrit P sous la forme $P = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et, en utilisant le fait que $\{1, X, \dots, X^n\}$ est une base de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ on montre que $P + P' + P'' = 0$ implique que $P = 0$.

– Soit on remarque que $\deg(T(P)) = \deg(P)$ (le montrer!). Par conséquent $T(P) = 0$ implique que $P = 0$.

Par le théorème du rang, on a :

$$\dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = n + 1$$

par injectivité de T on en déduit que $\dim(\text{Im}(T)) = n + 1$ et donc $\text{Im}(T) = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

L'application T est donc bijective.

Correction exercice 2

1. On vérifie que f est linéaire.

Pour (x_1, x_2) et (x'_1, x'_2) dans $E_1 \times E_2$ on a :

$$f((x_1, x_2) + (x'_1, x'_2)) = f(x_1 + x'_1, x_2 + x'_2) = x_1 + x'_1 + x_2 + x'_2 = f(x_1, x_2) + f(x'_1, x'_2).$$

Pour $\lambda \in \mathbb{F}$ on a $f(\lambda(x_1, x_2)) = f((\lambda x_1, \lambda x_2)) = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda f(x_1, x_2)$.

2. Le noyau de f est donné par l'ensemble suivant :

$$\text{Ker}(f) = \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \mid x_1 + x_2 = 0\}.$$

Pour $(x_1, x_2) \in \text{Ker}(f)$ on a $x_1 = -x_2 \in E_2$ d'où $x_1 \in E_1 \cap E_2$. On a donc

$$\text{Ker}(f) = \{(x_1, -x_1) \in E_1 \times E_2 \mid x_1 \in E_1 \cap E_2\}.$$

(On pourra montrer plus tard que $\text{Ker}(f)$ est isomorphe à $E_1 \cap E_2$.) On en déduit que $\dim(\text{Ker} f) = \dim(E_1 \cap E_2)$. Par le théorème du rang $\dim(\text{Im} f) = \dim(E_1 \times E_2) - \dim(\text{Ker} f)$. Or, on a vu dans la série 7 que $\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$. Par conséquent $\dim(\text{Im} f) = \dim(E_1 + E_2)$. Or, on a $\text{Im}(f) \subset E_1 + E_2$. Nous savons donc que $\text{Im} f$ est inclus dans $E_1 + E_2$ et que ces espaces sont de même dimension, ils sont donc égaux. D'où $\text{Im}(f) = E_1 + E_2$.

Correction exercice 3

- (i) \Rightarrow (ii) Supposons $\text{Ker } f = \text{Im } f$. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \text{Im } f$ donc $f(x) \in \text{Ker } f$, cela entraîne $f(f(x)) = 0$; donc $f^2 = 0$. De plus d'après le théorème du rang $\dim(\text{ker } f) + \text{rg}(f) = n$, mais $\dim(\text{Ker } f) = \dim(\text{Im } f) = \text{rg}(f)$, ainsi $2.\text{rg}(f) = n$.
- (ii) \Rightarrow (i) Si $f^2 = 0$ alors $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$ car pour $y \in \text{Im } f$ il existe x tel que $y = f(x)$ et $f(y) = f^2(x) = 0$. De plus si $2.\text{rg}(f) = n$ alors par le théorème du rang $\dim(\text{Ker } f) = \text{rg}(f)$ c'est-à-dire $\dim(\text{Ker } f) = \dim(\text{Im } f)$. Nous savons donc que $\text{Im } f$ est inclus dans $\text{Ker } f$ et que ces espaces sont de même dimension. Ils sont donc égaux, d'où $\text{Ker } f = \text{Im } f$.

Correction exercice 4

1. L'application nulle $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (0, 0)$ est linéaire et vérifie $\text{Im}(f) = \{(0, 0)\} \subset \text{Ker}(f) = \mathbb{R}^2$.
2. L'application identité $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x, y)$ est linéaire et vérifie $\text{Ker}(f) = \{(0, 0)\} \subset \text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.
3. D'après l'exercice précédent, $\text{ker}(f) = \text{im}(f)$ si et seulement si $f^2 = 0$ et $2.\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2$, c'est-à-dire $\text{rg}(f) = 1$. On vérifie que l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x - y)$ est linéaire et vérifie ces deux conditions.

Correction exercice 5

1. On laisse le soin au lecteur de REDIGER proprement la preuve de la linéarité de f .
2. On a :

$$f(X^p) = (X + 1)^p + (X - 1)^p - 2X^p$$

on montre, en développant $(X + 1)^p$ et $(X - 1)^p$ que ce polynôme est de degré $p - 2$ si $p \geq 2$ (le coefficient de X^{p-2} dans $f(X^p)$ est alors $p(p-1)$) et que $f(1) = f(X) = 0$. Soit $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i X^i$ comme f est linéaire, on a $f(P) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f(X^i)$. Comme $f(X^p)$ est de degré $p - 2$ pour $p \geq 2$, si $f(P) = 0$, on déduit de proche en proche que

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_2 = 0.$$

Donc, si $P \in \text{Ker}(f)$ on a $P = \lambda_0 + \lambda_1 X$. Inversement, on vérifie que si $P = \lambda_0 + \lambda_1 X$ alors $f(P) = 0$. Par conséquent, $\text{Ker}(f) = \text{Span}(1, X)$ dont on déduit que $\dim(\text{Ker } f) = 2$. Par le théorème du rang, on a

$$\dim(\mathcal{P}_n(\mathbb{R})) = n + 1 = \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f)$$

par conséquent $\text{rg}(f) = n - 1$. Il suffit donc de déterminer $n - 1$ vecteurs linéairement indépendants de $\text{Im}(f)$ pour en avoir une base. Or, on a vu que $f(X^p)$ est de degré $p - 2$ pour $p \geq 2$ et en adaptant la preuve de l'exercice 4 de la série 7, on obtient que la famille

$$\{f(X^2), \dots, f(X^n)\}$$

est linéairement indépendante. Comme cette famille a $n - 1$ éléments, c'est une base de $\text{Im}(f)$.

Correction exercice 6

Si T existe, on a, par le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}T) + \dim(\text{Im}T)$$

soit $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. Une condition nécessaire est donc donnée par cette relation. Montrons que cette relation est suffisante (c'est-à-dire que si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ alors il existe un tel T). Soit (e_1, \dots, e_p) une base de F que l'on complète en une base de E avec (e_{p+1}, \dots, e_n) . Soit (f_1, \dots, f_q) une base de G . On a $q = n - p$ donc (e_{p+1}, \dots, e_n) et (f_1, \dots, f_q) ont le même nombre d'éléments. Soit $T : E \rightarrow E$ l'application linéaire définie par :

$$T(e_i) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, p$$

$$T(e_{p+k}) = f_k \text{ pour } k = 1, \dots, q.$$

On vérifie facilement que $\text{Ker}(T) = F$ et $\text{Im}(T) = G$.

Correction exercice 7

– Soit $x \in \text{Ker}(f)$, montrons que $g(x) \in \text{Ker}(f)$.

$$f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(0) = 0$$

où la première égalité découle de l'hypothèse de l'énoncé, la seconde du fait que $x \in \text{Ker}(f)$ et la troisième du fait que f est linéaire. On en déduit que $g(x) \in \text{Ker}(f)$ et donc que $\text{Ker}(f)$ est stable par g .

– Soit $y \in \text{Im}(f)$, montrons que $g(y) \in \text{Im}(f)$. Comme $y \in \text{Im}(f)$ il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ d'où :

$$g(y) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x))$$

dont on déduit que $g(y) \in \text{Im}(f)$.