COMMENT DÉFINIR LA NOTION DE “PRODUIT SCALAIRE”

Suivant l’approche du livre d’Axler, notre définition de la notion de produit scalaire réunit les cas réel et complexe en un seul cas. Ici nous comparons cette approche à celle qui distingue entre les deux cas. Il est évident que les deux approches mènent à des définitions équivalentes. La différence entre les deux approches réside dans la façon de structurer les données et dans la terminologie utilisée.

La définition du cours: une approche globale

Definition. L’application de **conjugaison** $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ envoie $z = a+ib$ sur $\bar{z} = a-ib$.

Observer que si $z = a + i0$, alors $\bar{z} = z$. Ainsi la restriction de la conjugaison à $\mathbb{R}$ est l’identité.

La définition vue au cours d’un produit scalaire est la suivante.

Définition. Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel, où $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une **forme** sur V est une application $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$. La forme est **symétrique** si $\varphi(\vec{v}, \vec{w}) = \overline{\varphi(\vec{w}, \vec{v})}$ pour tous $\vec{v}, \vec{w} \in V$. Elle est **bilinéaire** si

$$\begin{aligned}\varphi(a\vec{v} + b\vec{w}, a'\vec{v}' + b'\vec{w}') =& a\bar{a}'\varphi(\vec{v}, \vec{v}') + a\bar{b}'\varphi(\vec{v}, \vec{w}') \\ &+ b\bar{a}'\varphi(\vec{w}, \vec{v}') + b\bar{b}'\varphi(\vec{w}, \vec{w}')\end{aligned}$$

pour tous $\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}', \vec{w}' \in V$ et $a, b, a', b' \in \mathbb{F}$. Elle est **définie positive** si $\varphi(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ (i.e., $\varphi(\vec{v}, \vec{v})$ est un nombre réel nonnégatif) pour tout $\vec{v} \in V$, et $\varphi(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ si et seulement si $\vec{v} = \vec{0}$.

Un **produit scalaire** sur V est une forme bilinéaire, symétrique, et définie positive.

Un $\mathbb{F}$-espace vectoriel V muni d’un produit scalaire est un espace vectoriel **préhilbertien**. Si $\dim V < \infty$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, alors V est un **espace euclidien** (même si le produit scalaire sur V n’est pas le produit scalaire euclidien). Si $\dim V < \infty$ et $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, alors V est un **espace hermitien**.

Remarque. L’importance de la conjugaison dans la définition du produit scalaire provient de son rôle dans la définition de la norme usuelle (ou valeur absolue) d’un nombre complexe. Plus précisément, si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, alors

$$|z| = (z \cdot \bar{z})^{\frac{1}{2}} = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}},$$

ce qui est aussi la norme euclidienne du vecteur $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Dès lors, si l’on veut que $\|a\vec{v}\| = |a| \cdot \|\vec{v}\|$ pour tout $a \in \mathbb{C}$ et tout $\vec{v} \in V$, où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d’un produit scalaire $< -, - >$, il faut que

$$< a\vec{v}, a\vec{v} >= a\bar{a} < \vec{v}, \vec{v} >,$$

ce qui nous motive d’imposer que

$$< a\vec{v}, b\vec{w} >= a\bar{b} < \vec{v}, \vec{w} >$$

pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ et tous $\vec{v}, \vec{w} \in V$. Par conséquent,

$$< b\vec{w}, a\vec{v} >= b\bar{a} < \vec{w}, \vec{v} >= \overline{a\bar{b}} < \vec{w}, \vec{v} >,$$

ce qui nous incite de poser la contrainte supplémentaire que

$$< \vec{w}, \vec{v} >= \overline{< \vec{v}, \vec{w} >}.$$

Une autre approche: les cas réel et complexe distingués

Il est important de se familiariser aussi avec cette approche, car la terminologie employée est probablement la plus usuelle.

Le cas réel.

Définition. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une forme $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est **symétrique** si $\varphi(\vec{v}, \vec{w}) = \varphi(\vec{w}, \vec{v})$ pour tous $\vec{v}, \vec{w} \in V$. Elle est **bilinéaire** si

$$\begin{aligned}\varphi(a\vec{v} + b\vec{w}, a'\vec{v}' + b'\vec{w}') =& aa'\varphi(\vec{v}, \vec{v}') + ab'\varphi(\vec{v}, \vec{w}') \\ &+ ba'\varphi(\vec{w}, \vec{v}') + bb'\varphi(\vec{w}, \vec{w}')\end{aligned}$$

pour tous $\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}', \vec{w}' \in V$ et $a, b, a', b' \in \mathbb{F}$. Elle est **définie positive** si $\varphi(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ pour tout $\vec{v} \in V$, et $\varphi(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ si et seulement si $\vec{v} = \vec{0}$.

Un **produit scalaire** sur V est une forme bilinéaire, symétrique, et définie positive.

Le cas complexe.

Nous introduisons d'abord une variation sur la notion de linéarité.

Définition. Soient V, W des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Une application $f : V \longrightarrow W$ est **semilinéaire** si $f(a\vec{v} + b\vec{v}') = \bar{a}f(\vec{v}) + \bar{b}f(\vec{v}')$ pour tous $\vec{v}, \vec{v}' \in V$ et $a, b \in \mathbb{C}$.

Nous appliquons ensuite cette notion à la définition de produits scalaires complexes

Définition. Une forme $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ est **hermitienne** si $\varphi(\vec{v}, \vec{w}) = \overline{\varphi(\vec{w}, \vec{v})}$ pour tous $\vec{v}, \vec{w} \in V$. Elle est **sesquilinéaire** si $\varphi(-, \vec{w}) : V \longrightarrow \mathbb{C}$ est linéaire pour tout $\vec{w} \in V$ et $\varphi(\vec{v}, -) : V \longrightarrow \mathbb{C}$ est semilinéaire pour tout $\vec{v} \in V$. Elle est **définie positive** si $\varphi(\vec{v}, \vec{v}) \geq 0$ (i.e., $\varphi(\vec{v}, \vec{v})$ est un nombre réel nonnégatif) pour tout $\vec{v} \in V$, et $\varphi(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ si et seulement si $\vec{v} = \vec{0}$.

Un **produit scalaire** (parfois appelé **produit scalaire hermitien**) sur V est une forme sesquilinéaire, hermitienne, et définie positive.

Commentaires (polémiques?)

Je pense qu'il est très important en mathématiques d'utiliser une terminologie aussi parlante et aussi peu ambiguë que possible, ce qui explique en partie pourquoi je préfère l'approche globale à celle de la distinction entre les cas réel et complexe. Par exemple, je trouve que la terminologie "semilinéaire" prête facilement à confusion. Sans en connaître la définition, on pourait facilement s'imaginer qu'elle voudrait dire que l'application était soit additive, soit homogène, mais pas les deux. Si l'on insiste pour distinguer entre les cas réel et complexe, je pense qu'il vaut mieux dire "conjugué-linéaire." De même, le mot "sesquilinéaire" semble impliquer que la forme est linéaire en une variable, tandis qu'elle est additive ou homogène, mais pas les deux, dans l'autre. Ensuite, le mot "hermitien" ne nous laisse pas deviner ce qu'il veut dire, à l'encontre du mot "symétrique." De nouveau, si l'on veut vraiment distinguer le cas réel du cas complexe, on peut dire "conjugué-symétrique."

Dans le même genre, il y a le mot "préhilbertien," qui est assez opaque, si l'on ne sait pas ce qu'est un espace de Hilbert...Egalement, le terme "espace euclidien" peut prêter à confusion, si l'on croit que son produit scalaire est forcément le produit scalaire euclidien. Et, de nouveau, le terme "espace hermitien" n'est pas très parlant.