EPFL
Algèbre linéaire
1ère année
2006-2007

23 octobre 2006

Série 1

L'exercice 7 est à rendre le 30 octobre au début de la séance d'exercices.

Exercice 1 *Démontrer la Proposition* 1.4 *et le point* (2) *de la Proposition* 2.4 *du document "Les nombres complexes et les polynômes".*

Exercice 2 *Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme* $a + ib$, $a \in \mathbb{R}$ *et* $b \in \mathbb{R}$:

$$\frac{-2}{1 - i\sqrt{3}}, \quad \frac{1 + 2i}{1 - 2i}.$$

Exercice 3 *Trouver les racines carrées de* $3 - 4i$ *et de* $24 - 10i$.

Exercice 4 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations suivantes :*

$$z^2 - \sqrt{3}z - i = 0; \quad z^4 + 2z^2 + 4 = 0.$$

Exercice 5 *Soit* $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. *Vérifier que* i *est racine de* P.
2. *En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de* P *sur* $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6 *Décomposer en produit de facteurs irréductibles sur* $\mathbb{R}[X]$ *et sur* $\mathbb{C}[X]$ *les polynômes* $P = X^4 + X^2 + 1$ et $Q = X^6 + 1$.

Exercice 7

1. *On pose* $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   (a) *Calculer le module de* j.
   (b) *Montrer que* $j^2 = \bar{j}$. *En déduire que* $j^3 = 1$ *et que* $1 + j + j^2 = 0$
2. *Soit le polynôme* $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.
   (a) *Montrer que* j *est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.*
   (b) *Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de* P *?*
   (c) *Décomposer* P *en facteurs irréductibles dans* $\mathbb{C}[X]$ *et dans* $\mathbb{R}[X]$.