EPFL 16 avril 2007
Algèbre linéaire
1ère année
2006-2007

Série 19

L'exercice 5.3 est à rendre le 23 avril au début de la séance d'exercices.

Exercice 1 *Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire et W un sous espace de V, alors :*

$$(W^{\perp})^{\perp} = W.$$

Exercice 2 *Soit F un sous-espace d'un espace euclidien E. Montrer qu'il existe une base orthonormale de F qui est inclue dans une base orthonormale de E.*

Exercice 3 *D'après le cours, on sait que si $T \in \mathcal{L}(E)$ est tel que $[T]_{\mathcal{B}}$ est une matrice triangulaire supérieure alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ telle que $[T]_{\mathcal{B}'}$ est triangulaire supérieure.*
S'il existe une base de vecteurs propres $\mathcal{B}$ de $T \in \mathcal{L}(E)$ (i.e. $[T]_{\mathcal{B}}$ est une matrice diagonale), existe-t'il une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de vecteurs propres ?

Exercice 4 *(Complément du cours)*
Montrer que les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si A^tA est inversible.

Exercice 5 *On considère l'espace $E = \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \oplus Span(f_0)$ où f_0 est la fonction définie par $f_0(t) = e^t$. On admettra sans démonstration que $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E.*
Le but de l'exercice est de déterminer

$$\alpha = \inf_{a,b\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (e^t - at - b)^2 dt.$$

1. *Donner une base orthonormée (P_1, P_2) de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.*
2. *Calculer $< f_0, P_1 >$, $< f_0, P_2 >$, et $\|f_0\|^2$. En déduire que*

$$\alpha = \frac{e^2 - e^{-2}}{2} - (\sqrt{6}e^{-1})^2 - \left(\frac{e - e^{-1}}{\sqrt{2}}\right)^2 = -7e^{-2} + 1.$$

3. *Même question avec le calcul de $\alpha' = \inf_{a,b\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (e^t - at^2 - bt - c)^2 dt$. (Indication : chercher une base orthonormée de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ pour le même produit scalaire, et en déduire α'.)*

Exercice 6 *On considère le système linéaire suivant :*

$$(S) \left\{ \begin{array}{rrcr} x & -\ y & = & 2 \\ 2x & +3y & = & -1 \\ 4x & +5y & = & 5 \end{array} \right.$$

1. *Montrer que le système (S) est incompatible.*
2. *On considère le système normal associé au système linéaire. Justifier le fait que le système normal admet une unique solution et utiliser la méthode des moindres carrés pour trouver la meilleure approximation d'une solution du système (S).*