

Série 2

Les exercices 6 et 7 sont à rendre le 6 novembre au début de la séance d'exercices.

Exercice 1 Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. L'application f est-elle bijective ?

Exercice 2 1. Soit l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , $f : x \mapsto x^2$.

(a) Déterminer les ensembles suivants : $f([-3, -1])$, $f([-2, 1])$, $f([-3, -1] \cup [-2, 1])$ et $f([-3, -1] \cap [-2, 1])$. Les comparer.

(b) Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty, 2])$, $f^{-1}([1, +\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty, 2] \cup [1, +\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty, 2] \cap [1, +\infty[)$.

2. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \rightarrow Y$. Supposons que $A, B \subset X$ et que $C, D \subset Y$. Prouver les affirmations suivantes.

(a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

(b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

(c) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ si f est injective.

(d) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(e) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

3. Trouver deux ensembles A et B tels que l'inégalité du (b) soit stricte pour $f(x) = x^2$.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?

2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

3. Montrer que la restriction de f à $[-1, 1]$ est une bijection et expliciter l'application réciproque.

Exercice 4 On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow D$. Montrer que :

$$g \circ f \text{ injective} \Rightarrow f \text{ injective,}$$

$$g \circ f \text{ surjective} \Rightarrow g \text{ surjective,}$$

$$(g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives}) \Leftrightarrow (f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives}).$$

Exercice 5 Soit $f : X \rightarrow Y$. Montrer que

1. $\forall B \subset Y \ f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X)$.

2. f est surjective ssi $\forall B \subset Y \ f(f^{-1}(B)) = B$.

3. f est injective ssi $\forall A \subset X \ f^{-1}(f(A)) = A$.

Exercice 6 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(t) = \cos(t) + i\sin(t)$. Trouver un sous-ensemble X du domaine de définition de l'application tel que la restriction de f à X est une bijection.

Exercice 7 Soit $f : X \rightarrow Y$. Montrer que si f est injective alors $\forall A, B \subset X$,

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset.$$