EPFL 18 juin 2007
Algèbre linéaire
1ère année
2006-2007

Série 27

Exercice 1 *Calculer rapidement le déterminant suivant*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$$

Exercice 2 *Soit M une matrice de $Mat(n,n,\mathbb{F})$ dont on note $C_1,\ldots,C_n$ les colonnes. Ainsi $det(M) = det(C_1,\ldots,C_n)$.*

1. *Déterminer $det(C_1+C_2, C_2+C_3,\ldots,C_i+C_{i+1},\ldots,C_n+C_1)$.*
2. *Montrer que $det(C_1+C_2+\ldots+C_n, C_2,\ldots,C_n) = det(C_1,C_2,\ldots,C_n)$.*
   ***Application de 2** : Calculer le déterminant*

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \ldots & b \\ b & a & b & \ldots & b \\ b & b & a & \ldots & b \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ b & b & \ldots & b & a \end{vmatrix}$$

Exercice 3 *Soient S et T dans $\mathcal{L}(V)$, montrer ou donner un contre-exemple à l'égalité suivante :*

$$det(T+S) = det(T) + det(S).$$

Exercice 4 *Soient A et B deux matrices d'ordre n à coefficients réels. Montrer que*

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = det(A+B).det(A-B)$$

Exercice 5 *Sans les calculer, montrer que les deux déterminants suivants sont égaux :*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

Quelques exercices de révision du semestre :

Exercice 6 *Soit A une matrice de $Mat(n,n,\mathbb{C})$, on définit le polynôme caractéristique de A comme étant celui de l'opérateur T_A associé à la matrice (i.e., de l'opérateur $v \mapsto Av$). On note $P(X)$ le polynôme caractéristique de A et on suppose que $P(0) \neq 0$. Calculer le polynôme caractéristique de A^{-1}.*

Exercice 7 *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Supposons que $T \in \mathcal{L}(V)$ vérifie*

$$\ker T^{n-2} \neq \ker T^{n-1}.$$

Montrer que T possède au plus deux valeurs propres.

Exercice 8 *On considère l'espace vectoriel $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$. Trouver $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie $p(0) = 0$ et $p'(0) = 0$, qui minimise $\int_{-1}^{1}(2+3x-p(x))^2dx$.*