EPFL 18 décembre 2006
Algèbre linéaire
1ère année
2006-2007

# Série 9

**L'exercice 7 est à rendre le 8 janvier au début de la séance d'exercices.**

**Exercice 1** *Soit* $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ *l'application définie par* $T(P) = P + P' + P''$.

1. *Montrer que* $T$ *est linéaire.*
2. *Montrer que* $T$ *est injective et en déduire que* $T$ *est bijective.*

**Exercice 2** *Soient* $E_1$ *et* $E_2$ *deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies d'un espace vectoriel* $E$, *on définit l'application* $f \colon E_1 \times E_2 \to E$ *par* $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

1. *Montrer que* $f$ *est linéaire.*
2. *Déterminer le noyau et l'image de* $f$.

**Exercice 3** *Soient* $E$ *un espace vectoriel de dimension* $n$ *et* $f$ *une application linéaire de* $E$ *dans lui-même. Montrer que les deux assertions qui suivent sont équivalentes :*

1. $Ker(f) = Im(f)$.
2. $f^2 = 0$ *et* $n = 2\, rg(f)$.

**Exercice 4** *Donner des exemples d'applications linéaires de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}^2$ *vérifiant :*

1. $ker(f)$ *inclus strictement dans* $im(f)$.
2. $im(f)$ *inclus strictement dans* $ker(f)$.
3. $ker(f) = im(f)$.

**Exercice 5** *Soit* $f : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ *l'application définie par* $f(P) = Q$ *avec* $Q(x) = P(x + 1) + P(x - 1) - 2P(x)$.

1. *Montrer que* $f$ *est une application linéaire.*
2. *Calculer* $f(X^p)$ *; quel est son degré ? En déduire* $Kerf$, *le rang de* $f$ *et* $Im\, f$.

**Exercice 6** *Soit* $E$ *un espace vectoriel et* $F$ *et* $G$ *deux sous-espaces vectoriels de* $E$. *A quelle condition nécessaire et suffisante existe-t'il un opérateur* $T : E \to E$ *tel que* $Ker(T) = F$ *et* $Im(T) = G$.

**Exercice 7** *Soient* $f$ *et* $g$ *deux endomorphismes de* $E$ *tels que* $f \circ g = g \circ f$. *Montrer que* $ker(f)$ *et* $Im(f)$ *sont stables par* $g$. *(On rappelle qu'un sous espace vectoriel* $V$ *de* $E$ *est dit stable par un opérateur* $T$ *de* $E$ *si et seulement si* $T(V) \subset V$.*)*