École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Algèbre linéaire I, II
Professeur K. Hess Bellwald
Sections de mathématiques et de physique

TRAVAIL ECRIT D'ALGÈBRE LINÉAIRE
du 12 janvier 2007
09h à 11h

NOM : ____________________

PRÉNOM : ____________________

SECTION : ____________________

Aucun document n'est autorisé. Aucun appareil éléctronique n'est permis. Ne pas dégrafer le cahier. Utiliser les feuilles de couleur comme brouillons. Tous les calculs et raisonnements doivent figurer dans le dossier rendu.

EXERCICE	VALEUR	POINTS
1	/10	
2	/30	
3	/30	
4	/30	
TOTAL	/100	
NOTE	/6	

Bon travail et bonne chance !

1. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les ensembles F_1 et F_2 des applications, respectivement paires et impaires sont deux sousespaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus F_2$. (Rappel : une fonction f est paire si $\forall x,\ f(-x) = f(x)$ et impaire si
[10] $\forall x,\ f(-x) = -f(x)$.)

2. Soient V et W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Soit $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ une base de V. Soit $ev : \mathcal{L}(V, W) \to W \times W$ l'application définie par

$$ev(T) := \big(T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\big),$$

pour toute application linéaire $T : V \to W$. Montrer que ev est linéaire.
[30] Supposant que $\dim W = 2$, calculer $\dim(\ker ev)$ et $\dim(\operatorname{Im} ev)$.

2. (suite)

3. Justifier votre réponse.

   (a) Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Poser

   $$W = \{f \in \mathcal{F}(V,V) \mid f \notin \mathcal{L}(V)\}.$$

[10] Est-ce que W est un sousespace vectoriel de $\mathcal{F}(V,V)$?

   (b) Est-il possible que tout polynôme $p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{C})$ puisse s'écrire de manière unique comme

   $$p(x) = p_+(x) + p_0(x) + p_-(x),$$

[10] où $p_+(1) = 0$, $p_0(0) = 0$, et $p_-(-1) = 0$?

(c) Soit $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Soit $(f_1, ..., f_n)$ une liste d'éléments de $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ telle que pour tout $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{F})$, il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$. Est-il possible que $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_j) = 0$ pour
[10] tout $1 \leq j \leq n$?

[4] 4. (a) Sans utiliser la notion de la dimension d'un espace vectoriel, donner la définition d'un espace vectoriel de dimension finie. Qu'est-ce qu'une base d'un espace vectoriel de dimension finie ?

[6] (b) Enoncer le Théorème de la Borne et le Théorème du Ballon.

(c) Démontrer que tout espace vectoriel de dimension finie admet
[10] une base.

[10] (d) Démontrer que toute base d'un espace vectoriel de dimension finie est de même longueur.