EPFL
Algèbre linéaire
1ère année
2006-2007

# Corrigé du travail écrit d'algèbre linéaire du 12 janvier 2007

**Correction exercice 1**
*Voir l'exercice 3 de la série 4.*

**Correction exercice 2**
*Montrons que ev est linéaire. Soient $T$ et $T'$ deux vecteurs de $\mathcal{L}(V,W)$, on a :*

$$\begin{aligned} ev(T+T') &= ((T+T')(\vec{v}_1),(T+T')(\vec{v}_2)) \\ &= (T(\vec{v}_1)+T'(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2)+T'(\vec{v}_2)) \text{ par définition de la somme dans } \mathcal{L}(V,W) \\ &= (T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2))+(T'(\vec{v}_1),T'(\vec{v}_2)) \text{ par définition de la somme dans } W\times W \\ &= ev(T)+ev(T') \end{aligned}$$

*Pour $\alpha$ dans $\mathbb{F}$, on a :*

$$\begin{aligned} ev(\alpha T) &= ((\alpha T)(\vec{v}_1),(\alpha T)(\vec{v}_2)) \\ &= (\alpha.T(\vec{v}_1),\alpha.T(\vec{v}_2)) \text{ par définition du produit par un scalaire dans } \mathcal{L}(V,W) \\ &= \alpha(T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2)) \text{ par définition du produit par un scalaire dans } W\times W \\ &= \alpha ev(T) \end{aligned}$$

*L'application ev est donc bien linéaire.*
*Soit $\{\vec{w}_1,\vec{w}_2\}$ une base de $W$. D'après l'énoncé $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ est une base de $V$. Montrons que $dim(\mathcal{L}(V,W))=6$. Pour cela on va montrer que $\{T_{i,j}\mid 1\le i\le 3, 1\le j\le 2\}$ est une base de $\mathcal{L}(V,W)$ où*

$$T_{i,j}(\vec{v}_k)=\left\{\begin{array}{ll}\vec{w}_j & \text{si } k=i\\ \vec{0} & \text{si } k\neq i\end{array}\right.$$

*Montrons que $\{T_{i,j}\mid 1\le i\le 3, 1\le j\le 2\}$ est une famille génératrice. Soit $T\in\mathcal{L}(V,W)$, on a $T(\vec{v}_i)=\alpha_{i,1}\vec{w}_1+\alpha_{i,2}\vec{w}_2\ \forall 1\le i\le 3$ et donc $T=\sum_{1\le i\le 3}\sum_{1\le j\le 2}\alpha_{i,j}T_{i,j}$.*
*Montrons que $\{T_{i,j}\mid 1\le i\le 3, 1\le j\le 2\}$ est une famille linéairement indépendante. Soit $\sum_{1\le i\le 3}\sum_{1\le j\le 2}\lambda_{i,j}T_{i,j}=0_{V,W}$ ($0_{V,W}$ désigne ici l'application linéaire nulle de $V$ dans $W$). En appliquant cette égalité au vecteur $\vec{v}_i$ on obtient :*

$$\vec{0}=0_{V,W}(\vec{v}_i)=\lambda_{i,1}\vec{w}_1+\lambda_{i,2}\vec{w}_2$$

*d'où $\lambda_{i,1}=\lambda_{i,2}=0$ puisque $\{\vec{w}_1,\vec{w}_2\}$ est une famille linéairement indépendante. En faisant varier $i$ entre 1 et 3 on obtient que $\lambda_{i,j}=0\ \forall 1\le i\le 3$ et $\forall 1\le j\le 2$.*
*Déterminons $Ker(ev)$ :*

$$Ker(e_v)=\{T\in\mathcal{L}(V,W)\mid T(\vec{v}_1)=\vec{0}=T(\vec{v}_2)\}$$

*On montre que $\{T_{3,1},T_{3,2}\}$ est une base de $Ker(ev)$. Par conséquent $dim(Ker(ev))=2$.*
*Par le théorème du rang on a :*

$$dim(Ker(ev))+dim(Im(ev))=dim(\mathcal{L}(V,W)).$$

*On en déduit que $dim(Im(ev))=4$.*

**Correction exercice 3**

- *(a) NON*
  *L'application nulle est linéaire donc elle n'est pas dans $W$ ce qui implique que $W$ ne peut pas être un espace vectoriel pour les opérations $+$ et $.$ usuelles sur $\mathcal{F}(V,V)$.*
- *(b) NON*
  *On peut exhiber un contre-exemple. Par exemple, l'égalité*

$$x = (x-1) - x + (x+1)$$

  *fournit deux décompositions différentes de $x \in \mathcal{P}_5(\mathbb{C})$.*
  *On peut également poser*

$$W_+ = \{p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{C}) \mid p(1) = 0\}$$
$$W_- = \{p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{C}) \mid p(-1) = 0\}$$
$$W_0 = \{p(x) \in \mathcal{P}_5(\mathbb{C}) \mid p(0) = 0\}.$$

  *Il est facile de vérifier que ce sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{P}_5(\mathbb{C})$ et que $dim(W_+) = dim(W_-) = dim(W_0) = dim(\mathcal{P}_5(\mathbb{C})) - 1 = 5$. Ainsi $dim(W_+) + dim(W_-) + dim(W_0) = 15 > 6 = dim(\mathcal{P}_5(\mathbb{C}))$. Par conséquent la somme $W_+ + W_- + W_0$ ne peut pas être directe.*
- *(c) NON*
  *On a $dim(\mathcal{F}(X,\mathbb{F})) = n$ car $\{\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n\}$, où*

$$\hat{x}_i(x_j) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{array} \right.$$

  *est une base de $\mathcal{F}(X,\mathbb{F})$ d'après le cours.*
  *On en déduit que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est une base de $\mathcal{F}(X,\mathbb{F})$ puisque c'est une liste de longueur $n = dim(\mathcal{F}(X,\mathbb{F}))$ qui est génératrice d'après l'énoncé.*
  *Si $\sum_{i=1}^n f_i(x_j) = 0 \ \forall 1 \leq j \leq n$ on aurait $\sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^n 1.f_i = 0$ ce qui est impossible puisque $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est linéairement indépendante.*

**Correction exercice 4**

*Voir le cours.*