

École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Algèbre linéaire I, II
Professeur K. Hess Bellwald
Sections de mathématiques et de physique

TRAVAIL ECRIT D'ALGÈBRE LINÉAIRE
du 3 mai 2007
11h15 à 13h

NOM : _____

PRÉNOM : _____

SECTION : _____

Aucun document n'est autorisé. Aucun appareil électronique n'est permis. Ne pas dégrafer le cahier. Utiliser les feuilles de couleur comme brouillons. Tous les calculs et raisonnements doivent figurer dans le dossier rendu.

EXERCICE	VALEUR	POINTS
1	/15	
2	/30	
3	/30	
4	/25	
TOTAL	/100	
NOTE	/6	

Bon travail et bonne chance !

- [15] 1. Soit V un \mathbb{F} -espace vectoriel de dimension finie, et soient $S, T \in \mathcal{L}(V)$.
Montrer que $\text{Spec}(T \circ S) = \text{Spec}(S \circ T)$.

2. On définit une application $N : \mathbb{F}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$N(\alpha, \beta, \gamma) := |\alpha|^2 + |\alpha + \beta - 1|^2 + |\beta + \gamma + 1|^2 + |\gamma|^2.$$

Trouver $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{F}^3$ tel que

$$N(\alpha, \beta, \gamma) < N(\alpha', \beta', \gamma')$$

pour tout $(\alpha', \beta', \gamma') \in \mathbb{F}^3 \setminus \{(\alpha, \beta, \gamma)\}$.

Remarque : Pour faciliter la résolution de cet exercice, vous pouvez demander à l'assistant une indication détaillée, sur feuille séparée.

Dès lors, votre note maximale sur cet exercice sera 20.

[30]

2. (suite)

3. Justifier votre réponse.

(a) Soit $\mathcal{B} = (p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x), p_5(x))$ une base orthonormale de $\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$, par rapport au produit scalaire

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_0^1 p(x)\bar{q}(x)dx.$$

Poser

$$p(x) = p_1(x) - p_2(x) + p_3(x) - p_4(x) + p_5(x)$$

et

$$q(x) = p_1(x) + 2p_2(x) + 3p_3(x) + 4p_4(x) + 5p_5(x).$$

[10]

Est-il possible que $\int_0^1 p(x)\bar{q}(x)dx = 0$?

- (b) Soit V un \mathbb{F} -espace vectoriel de dimension 4, et soit \mathcal{B} une base de V . Soit $T \in \mathcal{L}(V)$. Si

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

[10] existe-t-il $\vec{v} \in V$ tel que $T(\vec{v}) = \vec{v}$?

- (c) Soit V un \mathbb{F} -espace vectoriel. Soient $S_1, S_2, S_3, T \in \mathcal{L}(V) \setminus \{\mathbf{0}_V\}$. Supposer que $\text{Im } S_1 \subset \ker(T - Id_V)$, $\text{Im } S_2 \subset \ker(T)$ et $\text{Im } S_3 \subset \ker(T + Id_V)$. Existe-t-il $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{F}$ tels que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0$ et

$$\alpha_1 S_1(\vec{v}) + \alpha_2 S_2(\vec{v}) + \alpha_3 S_3(\vec{v}) = \vec{0}$$

[10]

pour tout $\vec{v} \in V$?

4. Soit V un \mathbb{F} -espace vectoriel.

[4] (a) Qu'est-ce qu'un produit scalaire sur V ?

[5] (b) Énoncer et démontrer le Théorème de Pythagore pour V , muni d'un produit scalaire \langle, \rangle . Expliquer tous les termes utilisés.

- [4] (c) Supposer V muni d'un produit scalaire \langle, \rangle . Qu'est-ce que le complément orthogonal S^\perp d'un sousensemble S de V ? Montrer que S^\perp est un sousespace de V .

- [12] (d) Supposer V muni d'un produit scalaire \langle, \rangle . Soit W un sous-espace de V , de dimension finie. Montrer que $V = W \oplus W^\perp$.