COMPLÉMENTS: ENSEMBLES ET APPLICATIONS

Quelques résultats pour compléter notre bref survol de la théorie des ensembles et des applications....

Proposition 1. *Soient X et Y des ensembles, et soit $f : X \to Y$ une application. Alors:*

$$f \text{ est une bijection} \iff f \text{ est inversible.}$$

Proof. $\Rightarrow$: Supposons que f est une bijection. Soit

$$R = \{\big(x, f(x)\big) \mid x \in X\} \subset X \times Y$$

la relation correspondante. Observer que pour tout $y \in Y$, il y a un unique $x \in X$ tel que $(x, y) \in R$, puisque f est une bijection.

Considérer la relation

$$R' = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\} \subset Y \times X.$$

Observer que

$$(y, x) \in R' \iff (x, y) \in R.$$

Par conséquent, R' correspond à une application de Y vers X, car pour tout $y \in Y$, il y a un unique $x \in X$ tel que $(y, x) \in R'$.

Soit $g : Y \to X$ l'application correspondante à R'. Alors il est immédiat que

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = x = Id_X(x), \quad \forall x \in X$$

et que

$$f \circ g(y) = f\big(g(y)\big) = y = Id_Y(y), \quad \forall y \in Y,$$

ce qui veut dire que

$$g \circ f = Id_X \quad \text{et} \quad f \circ g = Id_Y,$$

i.e., f est inversible, avec inverse g.

$\Leftarrow$: Supposons que f est inversible, et soit $g : Y \to X$ un inverse à f. Alors f est une surjection, puisque pour tout $y \in Y$,

$$y = Id_Y(y) = f \circ g(y) = f\big(g(y)\big) \in \mathrm{Im}(f).$$

Par ailleurs, f est une injection, car si $f(x) = f(x')$, alors

$$x = Id_X(x) = g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big) = g \circ f(x') = Id_X(x') = x'.$$

Par conséquent, f est une bijection. □

Lemma 2. *Soient $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ et $h : Z \to W$ des applications. Alors*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Proof. Pour tout $x \in X$,

$$h \circ (g \circ f)(x) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = (h \circ g) \circ f(x).$$

□

Proposition 3. *Si $f : X \to Y$ est inversible, alors son inverse est unique, i.e., si g et h sont des inverses de f, alors $g = h$.*

Proof. Soient $g, h : Y \to X$ des inverses de f. Alors

$$g = g \circ Id_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = Id_X \circ h = h.$$

$\square$