DÉTERMINANTS: UN BREF SURVOL

La logique de mon approche à l'algèbre linéaire, qui est celle du livre d'Axler, veut que l'on attend la fin du cours pour définir et étudier la notion du déterminant d'une matrice. Or certains de vos autres cours l'emploient déjà! J'ai donc décidé de rédiger un petit résumé de la définition et des propriétés essentielles du déterminant. Nous en verrons une définition plus élégante, ainsi que les preuves des propriétés du déterminant, vers la fin du cours.

1. Définitions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le déterminant est une application

$$\det : \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$$

qui joue un rôle important dans la résolution de systèmes linéaires et dans la recherche de valeurs propres. La définition du déterminant qui exige le moins de connaissances préalables est la suivante.

Définition. Une **permutation** d'un ensemble S est une bijection $\sigma : S \longrightarrow S$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble de toutes les permutations de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ est noté $\mathfrak{S}_n$.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le **nombre d'inversion** de σ est

$$NI(\sigma) := \#\{(i, j) \mid i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}.$$

Si $NI(\sigma)$ est un nombre pair (respectivement, impair), alors la permutation σ est dite **paire** (respectivement, **impaire**).

Exemple. Considérer $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, donnée par $\sigma(1) = 4$, $\sigma(2) = 3$, $\sigma(3) = 2$ et $\sigma(4) = 1$. Alors $NI(\sigma) = \#\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\} = 6$, donc σ est une permutation paire.

Il n'est pas difficile de vérifier que $\mathfrak{S}_n$ contient $n!$ permutations distinctes.

Définition. Soit $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$. Le **déterminant** de A, noté $\det A$ ou $|A|$, est le scalaire

$$\det A := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{NI(\sigma)} (A)_{1\sigma(1)} (A)_{2\sigma(2)} \cdots (A)_{n\sigma(n)}.$$

Autrement dit, pour calculer le déterminant d'une matrice $n \times n$, A, on dresse une liste de toutes les façons de choisir n coefficients de A tels que chaque couple de coefficients choisis se trouve dans des lignes et des colonnes distinctes. Ensuite on calcule la somme de tous les produits de tels ensembles de n coefficients, munis de signes appropriés.

Exemples.

(1) Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors $\det A = ad - bc$.

(2) Si

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

alors

$$\begin{aligned} \det A =& a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ & - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

On arrête là le développement explicite de la formule du déterminant, car $\det A$ a 24 sommands si A est de taille 4×4, 120 sommands si A est de taille 5×5, etc....

2. Propriétés essentielles du déterminant

Nous énoncons d'abord une proposition qui permet de simplifier bien des calculs. La preuve de presque toutes ses parties découle directement et facilement de la définition du déterminant.

Proposition 2.1. *Soit* $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$.

(1) $\det A = \det A^t$.
(2) *Si A est triangulaire, alors* $\det A = (A)_{11}(A)_{22} \cdots (A)_{nn}$.
(3) *Pour tout* $a \in \mathbb{F}$, $\det(aA) = a^n \cdot \det A$.
(4) *Si A a une ligne ou une colonne où il n'y a que des zéros, alors* $\det A = 0$.
(5) *S'il existe* $1 \leq i < j \leq n$ *et* $a \in \mathbb{F}$ *tels que soit* $\vec{\ell}_i(A) = a \cdot \vec{\ell}_j(A)$, *soit* $\vec{c}_i(A) = a \cdot \vec{c}_j(A)$, *alors* $\det A = 0$.
(6) *Si A' est obtenue de A en multipliant une des lignes ou une des colonnes par $a \in \mathbb{F}$, alors* $\det A' = a \cdot \det A$.
(7) *Si A' est obtenue de A en permutant deux lignes ou deux colonnes, alors* $\det A' = -\det A$.
(8) *Si A' est obtenue de A en remplaçant une ligne (respectivement, une colonne) par sa somme avec un multiple d'une autre ligne (respectivement, d'une autre colonne), alors* $\det A' = \det A$.

Les théorèmes suivants sont nettement plus difficiles de démontrer, en tout cas basé sur la définition de déterminant ci-dessus. Le premier théorème nous donne une très belle caractérisation des matrices inversibles, tandis que le deuxième théorème dit que le déterminant se comporte bien par rapport aux produits de matrices.

Théorème 2.2. *Soit* $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$. *Alors A est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$.

Théorème 2.3. *Soient* $A, B \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$. *Alors* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Puisque la partie (2) de la Proposition 2.1 implique que $\det I_n = 1$, le corollaire suivant est une conséquence immédiate du Théorème 2.3.

Corollaire 2.4. *Si* $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$ *est inversible, alors*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

3. Cofacteurs et la règle de Cramer

Nous présentons ici une autre façon de calculer le déterminant d'une matrice, laquelle peut faciliter le travail, sans pour autant le rendre vraiment abordable pour les grandes matrices. Ce n'est pas la définition du déterminant que l'on donne au départ, car elle rend la vérification des propriétés du paragraphe précédent plus difficile.

Nous verrons également une formule pour la solution d'un système de n équations linéaires en n variables, exprimée en termes de déterminants. L'intérêt de cette formule est surtout théorique, car son implémentation comme algorithme sur un ordinateur serait très gourmande en espace mémoire et en temps.

Définition. Soit $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$. Le **cofacteur** de $(A)_{ij}$ est

$$C_{ij} := (-1)^{i+j} \det A[i, j],$$

où $A[i, j]$ est la matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en enlevant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice A.

Exemples.

(1) Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors $A[1, 1] = [d]$, $A[1, 2] = [c]$, $A[2, 1] = [b]$ et $A[2, 2] = [a]$. Ainsi, $C_{11} = d$, $C_{12} = -c$, $C_{21} = -b$, et $C_{22} = a$.

(2) Si
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$
alors $C_{11} = 0$, $C_{12} = -5$, $C_{13} = 0$, $C_{21} = 4$, $C_{22} = 0$, $C_{23} = 6$, $C_{31} = -2$, $C_{32} = 0$, et $C_{33} = 2$.

Théorème 3.1. *Soit $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$. Alors pour tout $1 \leq j \leq n$,*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (A)_{ij} C_{ij}$$

et pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij} C_{ij}.$$

Par contre, si $i \neq k$, alors

$$\sum_{j=1}^{n} (A)_{ij} C_{kj} = 0.$$

Théorème 3.2. *Soit $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$. Soit $\widehat{A} \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$ la matrice spécifiée par $(\widehat{A})_{ij} = C_{ji}$, où C_{ij} est le cofacteur de A_{ij}. Si A est inversible, alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widehat{A}.$$

La matrice $\widehat{A}$ est parfois appelée **l'adjoint** de A. Dans ce cours, nous réservons le terme “adjoint” pour une autre notion.

La règle de Cramer. *Soit* $A\vec{x} = \vec{b}$ *un système linéaire de* n *équations en* n *variables tel que* $\det A \neq 0$. *Soit* $A[j]$ *la matrice obtenue de* A, *en remplaçant* $\vec{c}_j(A)$ *par* $\vec{b}$. *Alors l'unique solution de ce système est*

$$\vec{x} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} \det A[1] \\ \det A[2] \\ \vdots \\ \det A[n] \end{bmatrix}.$$

Exemple. Considérer le système linéaire suivant.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3 \\ -5x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

Alors $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, donc $A[1] = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ et $A[2] = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$. Puisque $\det A = 12$, $\det A[1] = -8$ et $\det A[2] = -14$, on obtient que l'unique solution de ce système est

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

4. Déterminants et valeurs propres

Le déterminant sert aussi d'outil pour déterminer les valeurs propres d'une matrice carrée. Puisque $\lambda \in \mathbb{F}$ est une valeur propre de $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$ si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, nous obtenons comme conséquence du Théorème que

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \iff \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Cette observation nous incite à formuler la définition suivante.

Définition. Le **polynôme caractéristique** de A est le polynôme à coefficients dans $\mathbb{F}$

$$c_A(x) := \det(A - xI_n).$$

La proposition ci-dessous est maintenant une évidence.

Proposition 4.1. *Soit* $A \in \mathrm{Mat}(n, n, \mathbb{F})$. *Alors les valeurs propres de* A *sont exactement les racines du polynôme caractéristique* $c_A(x)$.

Soit $p(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$, et écrire $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Lorsque l'on évalue $p(x)$ en 0, on obtient $p(0) = a_0$, i.e., le terme constant du polynôme $p(x)$ est égal à $p(0)$. Appliquée au polynôme caractéristique, cette observation implique que le terme constant de $c_A(x)$ est égal à $\det(A - 0 \cdot I_n)$, i.e., à $\det A$.

Exemple. Le polynôme caractéristique de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ est

$$c_A(x) = \det\begin{bmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{bmatrix} = (a-x)(d-x) - bc = x^2 - (a+d)x + (ad-bc).$$

La formule quadratique nous dit alors que les racines de $c_A(x)$ sont

$$\frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)}}{2}.$$

On a donc une formule explicite pour les valeurs propres d'une matrice 2×2.

En particulier, si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et $(a+d)^2 - 4(ad-bc) < 0$, alors la matrice A n'a pas de valeurs propres (réelles). Si $(a+d)^2 - 4(ad-bc) = 0$, alors A a une unique valeur propre, $\frac{1}{2}(a+d)$.