École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Algèbre linéaire I, II
Professeur K. Hess Bellwald
Sections de mathématiques et de physique

EXAMEN PROPÉDEUTIQUE D'ALGÈBRE LINÉAIRE
du 23 juillet 2007
14h15 à 18h00

NOM : ____________________

PRÉNOM : ____________________

SECTION : ____________________

Aucun document n'est autorisé. Aucun appareil éléctronique n'est permis. Ne pas dégrafer le cahier. Utiliser les feuilles de couleur comme brouillons. Tous les calculs et raisonnements doivent figurer dans le dossier rendu.

Vous pouvez utiliser les formules du cours pour les dimensions de $\mathcal{P}_n(\mathbb{F})$, $\mathrm{Mat}(m,n;\mathbb{F})$, $\mathcal{F}(X,\mathbb{F})$ et $\mathcal{L}(V,W)$ sans justification.

EXERCICE	VALEUR	POINTS
1	/10	
2	/15	
3	/18	
4	/25	
5	/32	
TOTAL	/100	
NOTE	/6	

Bon travail et bonne chance !

1. Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Un opérateur linéaire $P : V \to V$ est un *projecteur* s'il existe des sous-espaces vectoriels U et W de V tels que $V = U \oplus W$ et

$$P(\vec{u} + \vec{w}) = \vec{u}, \quad \forall \vec{u} \in U, \vec{w} \in W.$$

[2] (a) Montrer que $P \circ P = P$, si $P \in \mathcal{L}(V)$ est un projecteur.

[2] (b) Montrer que si $P \in \mathcal{L}(V)$ est un projecteur, alors $Id_V - P$ est aussi un projecteur.

1. (c) Soit $P \in \mathcal{L}(V)$ un projecteur. Poser

$$L = \{T \in \mathcal{L}(V) \mid \exists R \in \mathcal{L}(V) \text{ tel que } T = R \circ P\}$$

et

$$M = \{T \in \mathcal{L}(V) \mid \exists S \in \mathcal{L}(V) \text{ tel que } T = S \circ (Id_V - P)\}.$$

Montrer que L et M sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{L}(V)$ et
[6] que $\mathcal{L}(V) = L \oplus M$.

2. Soit $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. On définit

$$\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$$

par $\varphi\big(p(x), q(x)\big) := \sum_{k=0}^{2} p(k)q(k)$.

[4] (a) Montrer que φ est un produit scalaire sur V.

(b) Poser $W = \operatorname{span}(1, x)$. Trouver le complément orthogonal de W par rapport au produit scalaire φ. En déduire que

$$\|3x^2 - 6x + 1\|^2 + \|6x - 1\|^2 = 153.$$

[5]

2. (c) Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la
[6] liste $(1, x)$. En déduire $\text{proj}_W(2 + x + 5x^2)$.

3. (a) Poser

$$sl_n(\mathbb{C}) := \{A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{C}) \mid \mathrm{Tr}\, A = 0\}.$$

[5] Montrer que $sl_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{C})$ et calculer sa dimension.

3. (b) Soit $A \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{C})$. On définit une application

$$ad(A) : \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{C})$$

par $ad(A)(B) := AB - BA$ pour toute matrice $B \in \mathrm{Mat}(n,n;\mathbb{C})$. Montrer que $ad(A)$ est linéaire et que $sl_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace
[5] invariant par rapport à $ad(A)$.

3. (c) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $sl_2(\mathbb{C})$, et calculer la matrice

$$\Big[ad(A)|_{sl_2(\mathbb{C})}\Big]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$$

pour $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(Remarque : Les espaces $sl_2(\mathbb{C})$ et $sl_3(\mathbb{C})$ jouent un rôle très im-
[8] portant en physique des particules.)

4. Justifier votre réponse.

   (a) Soit $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ un ensemble. Soient

   $$S : \mathrm{Mat}(3, 2; \mathbb{R}) \to \mathcal{F}(X; \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad T : \mathcal{F}(X; \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(3, 2; \mathbb{R})$$

   des applications linéaires. Est-il possible que $\mathrm{Spec}(T \circ S) = \{-5, -2, 3\}$?

[5]

   (b) Poser $q(x) = x^7 + 1$. Poser $W = \{p(x) \in \mathcal{P}_7(\mathbb{R}) \mid p(0) = 0\}$. Soit $r(x) \in W$. Si

   $$\int_0^1 \big(q(x) - r(x)\big)p(x)dx = 0$$

   pour tout $p(x) \in W$, existe-t-il $s(x) \in W \setminus \{r(x)\}$ tel que

   $$\int_0^1 \big(q(x) - s(x)\big)^2 dx < \int_0^1 \big(q(x) - r(x)\big)^2 dx?$$

[5]

4. (c) Considérer $\mathbb{C}^5$, muni du produit scalaire euclidien pondéré, à poids $(2, 1, 3, 1, 4)$. Soit $S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^5)$. Si $\det S = 2 - i$, existe-t-il $\vec{v} = (v_1, ..., v_5) \in \mathbb{C}^5$ tel que

$$2|v_1|^2+|v_2|^2+3|v_3|^2+|v_4|^2+4|v_5|^2 \neq 2|w_1|^2+|w_2|^2+3|w_3|^2+|w_4|^2+4|w_5|^2,$$

[5] où $S(\vec{v}) = (w_1, ..., w_5)$?

(d) Soit $T \in \mathcal{L}\big(\mathcal{P}_3(\mathbb{C})\big)$. Est-il possible qu'il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{P}_3(\mathbb{C})$ telles que

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad [T]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} ?$$

[5]

[5] 4. (e) Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soient $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Si $\operatorname{Spec} S = \{-1, -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\}$ et $\operatorname{Spec} T = \{\frac{1}{2}, 1\}$, existe-t-il $\lambda \in \operatorname{Spec}(T \circ S)$ tel que $0 < |\lambda| < 1$?

5. (a) Soient V et W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels, chacun muni d'un produit scalaire. Soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Qu'est-ce que l'adjoint T^* de T (i.e., quelle est la *propriété* qui définit l'adjoint) ? Donner une formule
[4] pour T^* en fonction d'une base orthonormale de V.

[6] (b) Démontrer que :

i. $(\alpha S + \beta T)^* = \overline{\alpha} S^* + \overline{\beta} T^*$ quelque soient $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$;

ii. $(T^*)^* = T$ quelque soit $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

[4] 5. (c) Qu'est-ce qu'un opérateur auto-adjoint ? Qu'est-ce qu'un opérateur normal ?

[5] (d) Montrer que tout opérateur auto-adjoint est normal. Donner un exemple d'un opérateur normal qui n'est pas auto-adjoint.

[5] 5. (e) Montrer que toute valeur propre d'un opérateur auto-adjoint est réelle.

[3] (f) Enoncer le Théorème spectral complexe.

5. (g) Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(V)$ est auto-adjoint, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ soit une matrice diagonale à coefficients *réels*.

[5]