

École Polytechnique Fédérale de Lausanne
Algèbre linéaire I, II
Professeur K. Hess Bellwald
Sections de mathématiques et de physique

TRAVAIL ECRIT D'ALGÈBRE LINÉAIRE
du 24 avril 2008
11h15 à 13h

NOM : _____

PRÉNOM : _____

SECTION : _____

Aucun document n'est autorisé. Aucun appareil électronique n'est permis. Ne pas dégrafer le cahier. Utiliser les feuilles de couleur comme brouillons. Tous les calculs et raisonnements doivent figurer dans le dossier rendu.

EXERCICE	VALEUR	POINTS
1	/24	
2	/19	
3	/30	
4	/27	
Bonus	/5+5	
TOTAL	/100	
NOTE	/6	

Bon travail et bonne chance!

1. Soit $\alpha \in \mathbb{F}$, et soient $\vec{v}_1 = (1, -1, 0, 2)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 1, 2)$, $\vec{v}_3 = (1, 3, 5, 7)$ et $\vec{v}_4 = (0, 2, 3, \alpha)$ des vecteurs de \mathbb{F}^4

(a) Pour quelles valeurs de α est-ce que la liste $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est une base de \mathbb{F}^4 ?

[8]

- [8] (b) Si α est tel que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ n'est pas une base de \mathbb{F}^4 , quelle est la dimension de $\text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$?

[8]

(c) Soit $\vec{v} = (-2, k, 1, 3) \in \mathbb{F}^4$. Pour quelles valeurs de k est-il vrai que $\vec{v} \in \text{span}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$?

2. Soient V et W des \mathbb{F} -espaces vectoriels, dont les espaces vectoriels duaux sont $V^\# = \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ et $W^\# = \mathcal{L}(W, \mathbb{F})$. Si $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ est une base de V , la *base duale* de $V^\#$ est $\mathcal{B}^\# = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, où

$$\delta_i(\vec{v}_j) = \begin{cases} 1 & : i = j \\ 0 & : \text{sinon.} \end{cases}$$

Etant donné une application $f : V \rightarrow W$ et $\varphi \in W^\#$, on définit une application $f^\#(\varphi) : V \rightarrow \mathbb{F}$ par $f^\#(\varphi)(\vec{v}) = \varphi(f(\vec{v}))$.

- (a) Montrer que $f^\#(\varphi)$ est linéaire pour tout $\varphi \in W^\#$ si f est linéaire.

[4]

Bonus (5 points) : Supposer que $\dim W < \infty$. Montrer que f est linéaire si $f^\#(\varphi)$ est linéaire pour tout $\varphi \in W^\#$.

(b) L'exercice (a) implique qu'il existe une application

$$D : \mathcal{L}(V, W) \rightarrow \mathcal{F}(W^\#, V^\#) : T \mapsto T^\#.$$

[5]

Montrer que $\text{Im } D \subset \mathcal{L}(W^\#, V^\#)$.

(c) Soient $T_1 \in \mathcal{L}(V_0, V_1)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Montrer que

$$(T_2 \circ T_1)^\# = T_1^\# \circ T_2^\#.$$

[2]

- (d) Soient \mathcal{B}_0 et \mathcal{B}_1 des bases de \mathbb{F} -espaces vectoriels V_0 et V_1 , respectivement. Soit $T \in \mathcal{L}(V_0, V_1)$. Montrer que $[T^\sharp]_{\mathcal{B}_0^\sharp, \mathcal{B}_1^\sharp} = [T]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0}^t$.

[4]

- (e) Soient \mathcal{B}_0 , \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 des bases de \mathbb{F} -espaces vectoriels V_0 , V_1 et V_2 , respectivement. Soient $T_1 \in \mathcal{L}(V_0, V_1)$ et $T_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Etant donné que

$$[T_1]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et que

$$[T_2]_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

[4]

calculer $[(T_2 \circ T_1)^\sharp]_{\mathcal{B}_0^\sharp, \mathcal{B}_2^\sharp}$. Justifier votre calcul.

3. Indiquer la bonne réponse par une croix, et ensuite justifier votre réponse.

- (a) Soit T un opérateur linéaire sur $\mathcal{P}_3(\mathbb{C})$. S'il existe un polynôme $p(x)$ non-nul tel que $T(p(x)) = (1+i) \cdot p(x)$, est-il possible qu'il existe une base orthonormale \mathcal{B} de $\mathcal{P}_3(\mathbb{C})$ telle que

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1+i & i & 3 \\ 1-i & 0 & -2i & -5 \\ -i & 2i & 0 & -1+i \\ 3 & -5 & -1-i & 0 \end{bmatrix} ?$$

[2] Oui Non

[8] Justification :

- (b) Soit f une application de domaine $\text{Mat}(2, 3; \mathbb{R})$ et de codomaine $\mathcal{P}_5(\mathbb{R})$. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si f est surjective et $f(A) = 0$, est-il possible que f soit linéaire ?

[2] Oui Non

[8] Justification :

(c) Soient $A, B \in \text{Mat}(5, 7; \mathbb{C})$, $A \neq \mathbb{O}_{5 \times 7}$. Est-il vrai que

$$\frac{|Tr(A^t B)|^2}{Tr(A^t A)} \leq Tr(B^t B)?$$

[2] Oui Non

[8] Justification :

4. Soit V un \mathbb{F} -espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

- (a) Qu'est-ce qu'une liste orthogonale de vecteurs de V ? Quand est-ce qu'une liste orthogonale est orthonormale?

[2]

(b) Démontrer que si \mathcal{B} est une base orthonormale de V , alors

$$\|\vec{v}\| = \|[\vec{v}]_{\mathcal{B}}\|_{\text{euclid.}}$$

[5]

pour tout $\vec{v} \in V$.

[4] (c) Démontrer que toute liste orthogonale est linéairement indépendante.

(d) Soit W un sous-espace de V . Définir la projection orthogonale

$$\text{proj}_W : V \rightarrow V,$$

[6] et montrer qu'il s'agit d'une application linéaire.

[2] (e) Qu'est-ce que le complément orthogonal S^\perp d'un sous-ensemble S de V ?

[8] (f) Démontrer que si W est un sous-espace de dimension finie de V , alors $V = W \oplus W^\perp$.

Bonus (5 points) : Démontrer que si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\dim V < \infty$ et $T \in \mathcal{L}(V)$, alors il existe une base orthonormale \mathcal{B} de V telle que $[T]_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ soit triangulaire supérieure.