

## Corrigé de la série 1

### Exercice 1.

$$(1 - 3i)^3 = -26 + 18i, \quad (1 + i + i^2 + i^3)^{100} = (1 + i + i^2(1 + i))^{100} = 0,$$

$$\frac{\sqrt{7} + i}{(1 - i)(\sqrt{7} - i)} = \frac{3 - \sqrt{7}}{8} + \frac{3 + \sqrt{7}}{8}i. \quad \left(\frac{1}{i}\right)^{4567} = \left(\frac{1}{i}\right)^{67} = \left(\frac{1}{i}\right)^3 = i.$$

**Exercice 2.** Ecrivons  $z$  sous la forme  $z = a + bi$  et calculons

$$\operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = b - \frac{b}{a^2 + b^2} = \frac{b(a^2 + b^2 - 1)}{a^2 + b^2}.$$

Donc nous trouvons :

$$z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff \operatorname{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 0 \iff b(a^2 + b^2 - 1) = 0$$

$$\iff (b = 0 \text{ ou } a^2 + b^2 = 1) \iff (z \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ ou } |z| = 1).$$

### Exercice 3.

1. Pour la première équation, on calcule :

$$\frac{z - i}{z + 1} = 4i \iff (z(1 - 4i) = 5i, z \neq -1) \iff z = \frac{5i}{1 - 4i} = \frac{5i(1 + 4i)}{1 + 16} = -\frac{20}{17} + \frac{5}{17}i.$$

2. Considérons la deuxième équation :

$$z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = 0. \quad (1)$$

Voyons si il existe une solution réelle. Assumons donc que  $x \in \mathbb{R}$  et calculons :

$$x^3 + 9ix^2 + 2(6i - 11)x - 3(4i + 12) = (x^3 - 22x - 36) + (9x^2 + 12x - 12)i.$$

Ce terme s'annule si et seulement si  $x^3 - 22x - 36 = 0$  et  $9x^2 + 12x - 12 = 0$ . La deuxième de ces équations admet comme solutions  $-2$  et  $-2/3$ . Mais  $-2$  est aussi une solution de la première équation, et alors une solution de (1).

Par conséquent, le polynôme  $z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12)$  est divisible par  $z + 2$ . Par un calcul, on obtient :

$$z^3 + 9iz^2 + 2(6i - 11)z - 3(4i + 12) = (z + 2)(z^2 + (-2 + 9i)z + (-18 - 6i)).$$

La formule de la Proposition 2.8 du document "Les nombres complexes et les polynômes" nous dit que les racines de  $q(z) = z^2 + (-2 + 9i)z + (-18 - 6i)$  sont données par

$$\frac{1}{2}(2 - 9i \pm \sqrt{(-2 + 9i)^2 + 4(18 + 6i)}) = \frac{1}{2}(2 - 9i \pm \sqrt{-5 - 12i}).$$

Une racine carrée de  $-5 - 12i$  est un nombre complexe  $z = a + bi$  qui satisfait

$$z^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = -5 - 12i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = -5 \\ 2ab = -12 \end{cases}$$

On obtient donc  $2 - 3i$  et  $-2 + 3i$  comme racines carrées et alors  $2 - 6i$  et  $-3i$  comme racines de  $q$ .

Les solutions de (1) sont donc :

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2 - 6i, \lambda_3 = -3i.$$

#### Exercice 4.

1. On cherche les racines complexes du polynôme. Le discriminant du polynôme de degré 2 en  $x^2$  est  $-3 = 3i^2$ . On en déduit que  $z^2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$  où  $z$  est une racine de  $P$ . Il reste à calculer les racines carrées de  $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ . On trouve les racines :

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

(On peut remarquer que le polynôme est pair, i.e. de la forme  $\sum a_{2n}X^{2n}$ .)

En notant  $\lambda = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  on en déduit la décomposition suivante de  $p$  dans  $\mathbb{C}[x]$  :

$$p(x) = (x - \lambda)(x - \bar{\lambda})(x + \lambda)(x + \bar{\lambda}).$$

Pour obtenir la décomposition de  $p$  dans  $\mathbb{R}[x]$  on regroupe les racines conjuguées deux à deux :

$$(x - \lambda)(x - \bar{\lambda}) = x^2 - 2\operatorname{Re}(\lambda)x + |\lambda|^2 = x^2 - x + 1$$

et

$$(x + \lambda)(x + \bar{\lambda}) = x^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda)x + |\lambda|^2 = x^2 + x + 1$$

d'où la décomposition suivante de  $p$  dans  $\mathbb{R}[x]$  :

$$p(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

2. On remarque que  $i$  (et donc aussi  $-i$  par le point (2) de la Proposition 2.4) est racine de  $q$ . On en déduit que :

$$q(x) = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1).$$

Par des calculs et raisonnements similaires à ceux du point précédent on obtient les racines du polynôme  $x^4 - x^2 + 1$  :  $\lambda, \bar{\lambda}, -\lambda$  et  $-\bar{\lambda}$  où  $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ . On en déduit la décomposition suivante de  $q$  dans  $\mathbb{C}[x]$  :

$$q(x) = (x - i)(x + i)(x - \lambda)(x - \bar{\lambda})(x + \lambda)(x + \bar{\lambda})$$

et la décomposition suivante de  $q$  dans  $\mathbb{R}[x]$  :

$$q(x) = (x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1).$$

### Exercice 5.

1. Définie sur  $\mathbb{R}$ , l'application  $f$  n'est ni injective, ni surjective. En effet,  $f(1) = 1 = f(-1)$ , ce qui montre que  $f$  n'est pas injective. Et  $f$  n'est pas surjective, puisque le carré d'un nombre réel quelconque est toujours  $\geq 0$ .
2. Supposons que  $a^3 = b^3$ . Alors  $a^3 - b^3 = 0$ . On décompose l'expression pour obtenir

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = 0.$$

Donc soit  $a = b$ , soit  $a^2 + ab + b^2 = 0$ . Puisque  $a$  et  $b$  sont réels,  $a^2$  et  $b^2$  sont  $\geq 0$ ; si  $a$  et  $b$  ont la même signe, alors  $ab$  est  $\geq 0$  et alors  $a^2 + ab + b^2 = 0 \Rightarrow a = b = 0$ . Si les signes de  $a$  et de  $b$  sont opposées, alors  $ab < 0$ . Supposons que  $a \neq b$  et posons  $m = \max(|a|, |b|)$ . Alors  $|ab| < m^2$ , d'où  $a^2 + b^2 + ab > 0$ . Donc  $a^3 \neq b^3$ . On conclut que  $g$  est injective.

Or  $g$  est surjective, essentiellement car tout nombre réel possède une racine cube. Soit  $c \in \mathbb{R}$ . Le polynôme  $\tilde{g}(t) = t^3 - c$  est continue. Supposons que  $c \geq 0$ , et choisissons  $b > \max(c, 1)$ . Alors  $\tilde{g}(0) = -c < 0$  tandis que  $\tilde{g}(b) = b^3 - c > 0$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) un réel  $a$  entre 0 et  $b$  tel que  $\tilde{g}(a) = 0$ , c-à-d que  $a^3 = c$ . Donc  $g(a) = c$  et l'application  $g$  est surjective.

Par conséquent,  $g : t \mapsto t^3$  est une bijection.

3. L'application  $q$  n'est pas injective, par exemple  $q(-2) = q(0) = q(2) = 0$ , mais elle est surjective. En effet, si  $y \geq 0$ , alors

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 - 1 = y &\iff (x - 1)^2 = 1 + y \\ &\iff x - 1 = \sqrt{1 + y} \\ &\iff x = \sqrt{1 + y} + 1 \end{aligned}$$

alors  $y = q(\sqrt{1 + y} + 1)$ . Pareillement, si  $y < 0$ , alors  $y = q(-\sqrt{1 - y} - 1)$ .

Soit  $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \text{ ou } x \geq 2\}$ . Alors  $q|_X$  est bijective, avec application réciproque

$$q^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{1 + y} + 1 & y \geq 0 \\ -\sqrt{1 - y} - 1 & y < 0. \end{cases}$$

### Exercice 6.

1. Supposons que  $f$  est surjective. On sait donc que chaque élément  $y \in Y$  possède au moins un préimage. Définissons une fonction  $g : Y \rightarrow X$  en envoyant  $y \in Y$  sur un préimage choisie. Par définition, on a donc que  $f(g(y)) = y$  pour chaque  $y \in Y$ .

Supposons maintenant que  $g : Y \rightarrow X$  soit une fonction telle que  $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y$  pour tout  $y \in Y$ . Ce qui nous dit que pour un  $y \in Y$  fixé, l'élément  $g(y) \in X$  est un préimage de  $y$  sous  $f$ . En particulier, chaque  $y \in Y$  admet au moins un préimage, et  $f$  est donc surjective.

2. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application injective. Choisissons un élément  $x_0 \in X$  arbitraire. Nous définissons une fonction  $g : Y \rightarrow X$  en distinguant deux cas. Si  $y$  est contenu dans l'image  $f(X)$  de  $f$ , nous choisissons l'élément unique  $x \in X$  tel que  $f(x) = y$ , et nous définissons  $g(y) = x$ . Si  $y$  n'est pas un élément de  $f(X)$ , nous posons  $g(y) = x_0$ . Pour un  $x \in X$  quelconque, nous obtenons alors  $g(f(x)) = x$ .

Réciproquement, soit  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $g(f(x)) = x$  pour tout  $x \in X$ . Pour montrer que  $f$  est injective, supposons que  $f(x_1) = f(x_2)$  avec  $x_1, x_2 \in X$ . Appliquer  $g$  des deux côtés donne  $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$  et donc  $x_1 = x_2$ .

### Exercice 7.

1. Montrons que  $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ . Soit  $y \in f(A \cup B)$ . Il existe alors  $x \in A \cup B$  tel que  $f(x) = y$ . Comme  $x$  est contenu dans  $A \cup B$ ,  $x$  est dans  $A$  ou dans  $B$ . Dans le premier cas, on a que  $f(x) \in f(A)$ , dans le deuxième que  $f(x) \in f(B)$ . En tout cas, nous trouvons que  $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$ .

Prouvons l'inclusion inverse  $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ . Soit alors  $y \in f(A) \cup f(B)$ . Si  $y \in f(A)$ , il existe  $x \in A$  tel que  $f(x) = y$ . Comme  $A \subset A \cup B$ ,  $x \in A \cup B$  et donc  $y = f(x) \in f(A \cup B)$ . Si  $y \notin f(A)$ , on a nécessairement que  $y \in f(B)$ . Donc on trouve  $x \in B$  tel que  $f(x) = y$ , et comme  $B \subset A \cup B$ , on a que  $y = f(x) \in f(A \cup B)$  également.

Nous avons donc démontré que  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

2. Soit  $y \in f(A \cap B)$ . Alors  $\exists x \in A \cap B$  tel que  $f(x) = y$ . Comme  $x \in A$ , il s'ensuit que  $y \in f(A)$ . Également,  $x \in B$  et alors  $y \in f(B)$ . Par conséquent,  $y \in f(A) \cap f(B)$ . Comme  $y$  était arbitraire, ça montre que  $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ .
3. Prenons  $y \in f(A) \cap f(B)$ . Alors  $\exists a \in A$  tel que  $y = f(a)$  et  $\exists b \in B$  tel que  $y = f(b)$ . Comme  $f$  est injective,  $a$  et  $b$  coïncident. Alors  $a = b \in A \cap B$  et  $y = f(a) = f(b) \in f(A \cap B)$ . Alors  $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ .
4. Il y a une chaîne d'équivalences :  $x \in f^{-1}(C \cup D) \iff f(x) \in C \cup D \iff (f(x) \in C \text{ ou } f(x) \in D) \iff (x \in f^{-1}(C) \text{ ou } x \in f^{-1}(D)) \iff x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ . Elle montre que  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ .
5. De façon similaire :  $x \in f^{-1}(C \cap D) \iff f(x) \in C \cap D \iff (f(x) \in C \text{ et } f(x) \in D) \iff (x \in f^{-1}(C) \text{ et } x \in f^{-1}(D)) \iff x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ . Alors  $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ .