EPFL
Algèbre linéaire
1ère année
2007-2008

Corrigé de la série 12

Exercice 1.

(a) Non : $\det(I_2) + \det(-I_2) = 1 + (-1)^2 \det(I_2) = 2$, tandis que $\det(I_2 - I_2) = \det(0) = 0$.

(b) Non : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mais $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Oui : $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(B)\det(A) = \det(BA)$.

(d) Non : Soient AB et BA inversibles. Soient X et Y telles que $X \cdot AB = I_n = AB \cdot X$ et $Y \cdot BA = I_n = BA \cdot Y$. Alors $(XA) \cdot B = I_n$ et $B \cdot (AY) = I_n$. Si nous pouvons montrer que $XA = AY$, ça prouve que B est inversible et que $XA = AY$ et son inverse. Mais multiplier $XAB = I_n$ par AY à droite nous donne $XAB \cdot AY = AY$, et donc $XA = AY$.

Exercice 2. Pour les matrices élémentaires de $\mathrm{Mat}(2, 2; \mathbb{F})$ on a :

$$\det E_{1,2} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1$$

$$\det D_{1,\lambda} = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda \text{ et } \det D_{2,\lambda} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda$$

$$\det T_{1,2,\lambda} = \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \text{ et } \det T_{2,1,\lambda} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} = 1$$

Les matrices élémentaires $D_{i,\lambda}$ sont des matrices triangulaires. Par 2) de la Proposition 2.1 du polycopié sur les determinants, on trouve alors $\det(D_{i,\lambda}) = \lambda$. Par 8) de la même proposition, on a $\det(T_{i,j,\lambda}) = \det(I_n) = 1$. Pour calculer $\det(E_{i,j})$, nous utilisons la partie 7). Nous transférons $E_{i,j}$ en I_n en échangeant la i- et la j-ème ligne, et donc $\det(E_{i,j}) = -\det(I_n) = -1$.

Exercice 3. C'est une conséquence direct du raisonnement dans le corrigé de l'exercice précédent. Considérons le cas $E = D_{i,\lambda}$. Alors la matrice EA s'obtient de A en multipliant la i-ème ligne par λ. Par la Proposition 2.1, cela entraîne que $\det(EA) = \lambda \det(A)$. Mais $\lambda = \det(D_{i,\lambda})$, par l'exercice précédent, donc $\det(EA) = \det(E)\det(A)$. Pour les autres matrices élémentaires, on procède de manière analogue.

Exercice 4. Soit A inversible. Alors nous avons vu au cours que A s'écrit comme un produit de matrices élémentaires, i.e. de la forme $A = E_1 \cdots E_r$, où $r > 0$ et où $E_1, \ldots, E_r$ sont des matrices élémentaires. Par récurrence sur r, nous obtenons $\det(A) = \det(E_1) \cdots \det(E_r)$ par l'exercice 3. Or le déterminant d'une matrice élémentaire n'est jamais nul, par l'exercice 2. Il s'ensuit que $\det(A) \neq 0$.

Soit maintenant $A = (\alpha_{i,j}) \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{F})$ une matrice non-inversible. Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire associée à A et la base standard $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Par définition, f n'est pas un isomorphisme et donc pas injective. Soit $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ un élément non-nul du noyau de f. Il y a au moins un k tel que $v_k \neq 0$. L'équation $A\vec{v} = \vec{0}$ signifie que

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1}v_1 + \alpha_{1,2}v_2 + \cdots + \alpha_{1,n}v_n &= 0 \\ &\cdots \\ \alpha_{n,1}v_1 + \alpha_{n,2}v_2 + \cdots + \alpha_{n,n}v_n &= 0. \end{aligned}$$

Soit A' la matrice obtenue de A en multipliant la k-ème colonne par v_k. Alors $\det(A') = v_k \det(A)$ par Proposition 2.1.6). Construisons maintenant des matrices $A'_0, A'_1, \ldots, A'_n$ par récurrence :

- $A'_0 = A'$;
- pour $k-1 \geq i \geq 0$, nous définissons A'_{i+1} comme la matrice obtenue de A'_i en remplaçant la k-ème colonne par sa somme avec v_i fois la i-ème colonne ;
- $A'_{k+1} = A'_k$;
- pour $n-1 \geq i \geq k+1$, nous définissons A'_{i+1} comme la matrice obtenue de A'_i en remplaçant la k-ème colonne par sa somme avec v_i fois la i-ème colonne.

Par construction, la matrice A'_n est donnée par

$$A'_n = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,k-1} & \sum_i \alpha_{1,i}v_i = 0 & \alpha_{1,k+1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,k-1} & \sum_i \alpha_{n,i}v_i = 0 & \alpha_{n,k+1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix}$$

Par Proposition 2.1.4), son déterminant est nul. Par 8), celui s'exprime aussi comme $\det(A'_n) = \det(A') = v_k \det(A)$. Comme $v_k \neq 0$, il faut que $\det(A) = 0$, ce qui était à démontrer.

Exercice 5. Supposons que A soit inversible. Dans ce cas-là, nous écrivons A comme un produit de matrices élémentaires $A = E_1 \cdots E_r$, comme au-dessus. Par récurrence, l'exercice 3 nous donne :

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1 \cdots E_r B) = \det(E_1) \cdots \det(E_r) \det(B) \\ &= \det(E_1 \cdots E_r) \det(B) = \det(A) \det(B). \end{aligned}$$

Si A n'est pas inversible, nous avons $\det(A) = 0$ par le 4 et $\det(AB) = 0$ par le 1.(d). Donc nous trouvons que $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ dans ce cas également.