

Corrigé de la série 13

Exercice 1. Soient A, B, C les sommets du triangle en face de a, b, c , respectivement, et soient \vec{v} et \vec{w} les vecteurs d'origine C et menants à A et B , respectivement. Alors $\vec{v} - \vec{w}$ est le vecteur menant de B à A . Avec ces notations, la loi des cosinus énonce alors que

$$(*) \quad \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 - 2\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\cos(\gamma).$$

Par définition, le côté gauche vaut $\|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = (\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w})$. En utilisant les identités facilement vérifiables (dont la deuxième est en fait une conséquence des autres deux)

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}, \quad (\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}, \quad \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$$

pour $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ ou par calcul direct, nous trouvons

$$(\vec{v} - \vec{w}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2.$$

Substituer cette expression pour le côté gauche dans $(*)$ donne l'énoncé cherché.

Pour l'angle entre $(2, 2)$ et $(0, 3)$, on trouve $\pi/4$, pour celui entre $(1, 0, -1)$ et $(2, 19, 2)$ on obtient $\pi/2$.

Exercice 2. Soit \vec{v} et \vec{w} les vecteurs menants de p_0 à a et à un point $p \in V$, respectivement. À l'aide de l'exercice précédent, on trouve (\perp note "est orthogonal à") :

$$\begin{aligned} (p - a) \perp (p - a') &\iff (\vec{w} - \vec{v}) \perp (\vec{w} + \vec{v}) \iff (\vec{w} - \vec{v}) \cdot (\vec{w} + \vec{v}) = 0 \\ &\iff \|w\|^2 = \|v\|^2 \iff \|w\| = r \iff w \in S(r, p_0). \end{aligned}$$

Exercice 3.

(a) En utilisant les identités mentionnées dans le corrigé du premier exercice, on calcule :

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2.$$

Alternativement, on vérifie l'égalité directement par calcul. Géométriquement, il s'agit de la loi des cosinus (utiliser $\cos(\pi - \gamma) = -\cos(\gamma)$), et donc d'une généralisation du théorème de Pythagore, pour un triangle non nécessairement rectangle.

(b) On calcule :

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{v} \cdot \vec{w} + \|\vec{w}\|^2 = 2(\|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2).$$

Géométriquement, c'est la règle du parallélogramme, qui dit que la somme des carrés des longueurs des quatre cotés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses diagonales.

Exercice 4. Pour que le but du vecteur $t\vec{w}$ soit la projection orthogonale $p_{\mathbb{R}\vec{w}}^\perp(\vec{v})$ de \vec{v} sur la droite par \vec{w} , il est suffisant et nécessaire que $\vec{v} - t\vec{w}$ soit orthogonale à \vec{w} . On en tire que $t = (\vec{v} \cdot \vec{w})/\|\vec{w}\|^2$ et donc que

$$p_{\mathbb{R}\vec{w}}^\perp(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \vec{w}.$$

Pour l'exemple, on trouve $p_{\mathbb{R}(1,2)}^\perp(3, 1) = (1, 2)$.