EPFL
Algèbre linéaire
1ère année
2007-2008

Corrigé de la série 26

Exercice 1.

(a) Comme la base par rapport à laquelle nous connaissons la matrice de T est orthonormée pour le produit scalaire sous considération et comme cette même matrice est symétrique, nous déduisons que T est auto-adjoint. Par le théorème spectral réel, T est diagonalisable.

(b) On vérifie que A est orthogonale. Par conséquent, T est une isométrie, et les valeurs propres possibles sont 1 et -1.

(c) La trace $\mathrm{tr}(A) = 2$ est égale à la somme des valeurs propres, comptées avec leurs multiplicités. La seule possibilité est $\mathrm{mult}(1) = 3$ et $\mathrm{mult}(-1) = 1$. Donc

$$p_T(x) = (x-1)^3(x+1) = x^4 - 2x^3 + 2x - 1.$$

On note que le coefficient constant coincide bien avec $(-1)^4 \det(A) = 1^3 \cdot (-1) = -1$.

Exercice 2. Choisissons une base orthonormée $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ de V. Rappelons la formule $u = \sum_{i=1}^n \langle u, u_i \rangle u_i$ pour tout $u \in V$. Les entrées diagonales de la matrice $[T]_\mathcal{B}$ sont données par

$$\langle Tu_i, u_i \rangle = \langle \langle u_i, v \rangle w, u_i \rangle = \langle u_i, v \rangle \langle w, u_i \rangle, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Alors on calcule :

$$\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}([T]_\mathcal{B}) = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v \rangle \langle w, u_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \langle w, u_i \rangle u_i, v \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \langle w, u_i \rangle u_i, v \rangle = \langle w, v \rangle.$$

Exercice 3.

(a) Par exemple les opérateurs associés aux matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Supposons d'abord que $\dim(V)$ est pair. Soit $\dim(V) = 2n$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{2n})$ une base de V. Poser $T(e_{2k-1}) = -e_{2k}$ et $T(e_{2k}) = e_{2k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$ détermine un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(V)$. Son carré $T^2 \in \mathcal{L}(V)$ satisfait

$$T^2(e_{2k-1}) = T(-e_{2k}) = -T(e_{2k}) = -e_{2k-1}$$

et

$$T^2(e_{2k}) = T(e_{2k-1}) = -e_{2k}.$$

Il prend donc les mêmes valeurs sur $\mathcal{B}$ que l'opérateur $-\mathrm{id}_V$. Il s'ensuit que $T^2 = -\mathrm{id}_V$. Soit maintenant $\dim(V)$ impair et supposons qu'on ait $T \in \mathcal{L}(V)$ avec $T^2 = -\mathrm{id}_V$. Alors

$$\det(T^2) = \det(-\mathrm{id}_V) = (-1)^{\dim(V)} \det(\mathrm{id}_V) = -1.$$

D'un autre côté, $\det(T^2) = (\det(T))^2 \geq 0$. Contradiction !