

Corrigé du travail écrit du 24 avril 2008 (Indications)

Exercice 1. C'est l'exercice 4 de la série 10.

Exercice 2.

(a) Soit $\varphi \in W^\sharp$. Soient $v, w \in V$ et $\alpha \in \mathbb{F}$. Alors :

$$\begin{aligned}(f^\sharp(\varphi))(v+w) &= \varphi(f(v+w)) = \varphi(f(v) + f(w)) = \varphi(f(v)) + \varphi(f(w)) \\ &= (f^\sharp(\varphi))(v) + (f^\sharp(\varphi))(w). \\ (f^\sharp(\varphi))(\alpha v) &= \varphi(f(\alpha v)) = \varphi(\alpha f(v)) = \alpha \varphi(f(v)) \\ &= \alpha (f^\sharp(\varphi))(v).\end{aligned}$$

Par conséquent, $f^\sharp(\varphi): W \rightarrow \mathbb{F}$ est linéaire. On pourrait aussi simplement remarquer que $f^\sharp(\varphi)$ est par définition la composition des fonctions linéaires f et φ , et donc linéaire.

Bonus : Soit $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ une base de W . Soient $v, w \in V$ et $\alpha \in \mathbb{F}$ arbitraires. Montrons d'abord que $f(v+w) = f(v) + f(w)$. Comme $f(v+w)$ est un vecteur de W et \mathcal{C} est une base de W , ils existent $\gamma_i \in \mathbb{F}$, $1 \leq i \leq m$, tels que $f(v+w) = \sum_{i=1}^m \gamma_i w_i$. Similairement, il y a des scalaires $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{F}$, $1 \leq i \leq m$, tels que $f(v) = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i$ et $f(w) = \sum_{i=1}^m \beta_i w_i$. Soit $\mathcal{C}^\sharp = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ la base duale de \mathcal{C} . Par hypothèse, $f^\sharp(\epsilon_j)$ est linéaire pour tout $j = 1, \dots, m$, et alors

$$(*) \quad (f^\sharp(\epsilon_j))(v+w) = (f^\sharp(\epsilon_j))(v) + (f^\sharp(\epsilon_j))(w).$$

Evaluons les deux côtés de $(*)$: Le côté gauche donne

$$(f^\sharp(\epsilon_j))(v+w) = \epsilon_j(f(v+w)) = \epsilon_j\left(\sum_{i=1}^m \gamma_i w_i\right) = \sum_{i=1}^m \gamma_i \epsilon_j(w_i) = \gamma_j,$$

où nous avons utilisé que ϵ_j est linéaire. Pour le côté droite, nous obtenons

$$(f^\sharp(\epsilon_j))(v) + (f^\sharp(\epsilon_j))(w) = \dots = \alpha_j + \beta_j.$$

Mais cela entraîne que

$$f(v+w) = \sum_{i=1}^m \gamma_i w_i = \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) w_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i w_i + \sum_{i=1}^m \beta_i w_i = f(v) + f(w).$$

De façon similaire, on montre que $\alpha(f(v)) = \alpha f(v)$. Comme α, v et w étaient arbitraires, nous avons prouvé que f est linéaire.

- (b) Nous devons montrer que $f^\sharp: W^\sharp \rightarrow V^\sharp$ est linéaire pour tout $f: V \rightarrow W$ linéaire. Pour $\varphi, \psi \in W^\sharp$, il faut vérifier que

$$(\spadesuit) \quad f^\sharp(\varphi + \psi) = f^\sharp(\varphi) + f^\sharp(\psi),$$

i.e. que

$$f^\sharp(\varphi + \psi)(v) = (f^\sharp(\varphi) + f^\sharp(\psi))(v)$$

pour tout $v \in V$. Soit donc $v \in V$ arbitraire. Alors :

$$\begin{aligned} (f^\sharp(\varphi + \psi))(v) &= (\varphi + \psi)(f(v)) = \varphi(f(v)) + \psi(f(v)) = (f^\sharp(\varphi))(v) + (f^\sharp(\psi))(v) \\ &= (f^\sharp(\varphi) + f^\sharp(\psi))(v), \end{aligned}$$

et donc (\spadesuit) est vrai. De façon analogue, on s'assure que $(f^\sharp)(\alpha\varphi) = \alpha(f^\sharp(\varphi))$ pour tout $\alpha \in \mathbb{F}$ et $\varphi \in W^\sharp$.

- (c) Les deux fonctions $(T_2 \circ T_1)^\sharp$ et $T_1^\sharp \circ T_2^\sharp$ vont de V_2^\sharp dans V_0^\sharp , la question est donc raisonnable. Pour $\psi \in V_2^\sharp$ et $v \in V_0$, on calcule :

$$\begin{aligned} ((T_1^\sharp \circ T_2^\sharp)(\psi))(v) &= ((T_1^\sharp(T_2^\sharp(\psi))))(v) = (T_2^\sharp(\psi))(T_1(v)) = \psi(T_2(T_1(v))) \\ &= (\psi(T_2 \circ T_1))(v) = ((T_2 \circ T_1)^\sharp(\psi))(v). \end{aligned}$$

C'est vrai pour tout $v \in V_0$, et donc $(T_1^\sharp \circ T_2^\sharp)(\psi) = (T_2 \circ T_1)^\sharp(\psi)$. Ceci est vrai pour tout $\psi \in V_2^\sharp$, et alors $(T_1^\sharp \circ T_2^\sharp) = (T_2 \circ T_1)^\sharp$.

- (d) Soient $\mathcal{B}_0 = (v_1, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}_1 = (w_1, \dots, w_m)$ et soient $\mathcal{B}_0^\sharp = (\delta_1, \dots, \delta_n)$, $\mathcal{B}_1^\sharp = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)$ les bases duales. Posons $[T]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0} = (\alpha_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $[T^\sharp]_{\mathcal{B}_0^\sharp, \mathcal{B}_1^\sharp} = (\beta_{k,l})_{1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m}$. Les $\beta_{k,l}$ satisfont alors

$$(\heartsuit) \quad T^\sharp(\epsilon_l) = \sum_{k=1}^n \beta_{k,l} \delta_k.$$

Evaluons les deux côtés de (\heartsuit) sur les éléments v_j de la base \mathcal{B}_0 . Pour le côté gauche, on trouve

$$(T^\sharp(\epsilon_l))(v_j) = \epsilon_l(T(v_j)) = \epsilon_l\left(\sum_{i=1}^m \alpha_{i,j} w_i\right) = \alpha_{l,j},$$

et pour le côté droite :

$$\left(\sum_{k=1}^n \beta_{k,l} \delta_k\right)(v_j) = \beta_{j,l}.$$

Par conséquent, on a $\alpha_{l,j} = \beta_{j,l} \forall j, l$, ce qui équivaut à dire que $[T^\sharp]_{\mathcal{B}_0^\sharp, \mathcal{B}_1^\sharp} = [T]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0}$.

- (e) Par les exercices précédents, on a :

$$[(T_2 \circ T_1)^\sharp]_{\mathcal{B}_0^\sharp, \mathcal{B}_2^\sharp} \stackrel{(c)}{=} [T_1^\sharp \circ T_2^\sharp]_{\mathcal{B}_0^\sharp, \mathcal{B}_2^\sharp} = [T_1^\sharp]_{\mathcal{B}_0^\sharp, \mathcal{B}_1^\sharp} \cdot [T_2^\sharp]_{\mathcal{B}_1^\sharp, \mathcal{B}_2^\sharp} \stackrel{(d)}{=} [T_1]_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0}^t \cdot [T_2]_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}^t.$$

Alors :

$$[(T_2 \circ T_1)^\sharp]_{\mathcal{B}_0^\sharp, \mathcal{B}_2^\sharp} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

- (a) Non. Si une telle base \mathcal{B} existait, $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ serait égale à sa matrice transposée conjuguée. Cela voudrait dire que T était auto-adjoint. Mais un opérateur linéaire auto-adjoint n'admet que des valeurs propres réelles. Cependant, par hypothèse, T admet la valeur propre non-réelle $1 + i$. Une base \mathcal{B} avec les propriétés citées n'existe donc pas.
- (b) Non. Supposons au contraire que f est linéaire. Comme $A \neq 0$ et $f(A) = 0 = f(0)$, f n'est pas injective. Comme f est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension, à voir 6, f n'est pas surjective non plus. (Ceci est une conséquence directe du théorème du rang, qui dit pour notre exemple que $\dim(\text{Mat}(2, 3; \mathbb{R})) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{im } f)$, alors que $6 > \dim(\text{im}(f))$ et donc que $\text{im}(f) \subsetneq \mathcal{P}_5(\mathbb{R})$.) Contradiction!
- (c) Non. En fait, la question, comme elle est posée, n'a pas de sens. La raison c'est qu'il se peut que $\text{tr}(A^t A)$ (ou $\text{tr}(B^t B)$) soit non-réel. C'est le cas pour

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1+i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

par exemple. Dans ce cas là, l'inégalité n'a pas de sens, comme les nombre complexes ne sont pas ordonnés.

L'intention était de formuler la question pour des matrices **réels** $A, B \in \text{Mat}(5, 7; \mathbb{R})$. Dans cette situation-là, la forme

$$\langle -, - \rangle : \text{Mat}(5, 7; \mathbb{R}) \times \text{Mat}(5, 7; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par $\langle A, B \rangle = A^t B$ est un produit scalaire, comme nous avons vu au cours. Elle satisfait donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle A, B \rangle|^2 \leq \langle A, A \rangle \cdot \langle B, B \rangle \quad \forall A, B \in \text{Mat}(5, 7; \mathbb{R}).$$

Si $A \neq 0$ et donc $\langle A, A \rangle \neq 0$, ceci implique que

$$\frac{|\langle A, B \rangle|^2}{\langle A, A \rangle} \leq \langle B, B \rangle,$$

ce qui est l'inégalité en question.

Remarque : Pour $\text{Mat}(5, 7; \mathbb{C})$, la forme $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$ est un produit scalaire.

Exercice 4. Voir le cours.