

Série 24

L'exercice 5 est à rendre le 26 mai au début de la séance d'exercices.

Le symbole \mathbb{F} désigne soit \mathbb{R} , soit \mathbb{C} , et V un \mathbb{F} -espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 1. Soient $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Montrer que si ST est nilpotent, alors TS est nilpotent.

Exercice 2. Soient $T \in \mathcal{L}(V)$ nilpotent et $v \in V - \{0\}$. Prouver que l'ensemble $\{v, Tv, T^2v, \dots\}$ contient exactement un vecteur propre.

Exercice 3. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ l'opérateur linéaire défini sur la base $(1, x, x^2)$ par

$$T(1) = -5 - 8x - 5x^2, \quad T(x) = 1 + x + x^2, \quad T(x^2) = 4 + 7x + 4x^2.$$

Montrer que T est nilpotent.

Pour les exercices suivants, on suppose que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Exercice 4. Soient $S, T \in \mathcal{L}(V)$ tels que $TS = ST$.

- Montrer que S, T et ST admettent un vecteur propre commun.
- Y a-t-il un énoncé similaire pour S, T et $S + T$?
- L'hypothèse $TS = ST$ est-elle essentielle?

Exercice 5. Soit $\mathcal{S} = (e_1, e_2, e_3)$ la base standard de \mathbb{C}^3 . Déterminer les polynômes caractéristiques des opérateurs linéaires $T_i \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, $1 \leq i \leq 3$, dont les matrices $A_i = [T_i]_{\mathcal{S}}$ par rapport à \mathcal{S} sont données par :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2\frac{1}{2} & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6. Soit $T \in \mathcal{L}(V)$ nilpotent. Calculer le polynôme caractéristique de T .

Exercice 7. Soient $T \in \mathcal{L}(V)$ et $\mu \in \mathbb{C}$. Comparer les valeurs propres, espaces propres, espaces propres généralisés et polynômes caractéristiques de T et de $T + \mu \cdot \text{id}_V$.

Exercice 8.

- Soit $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ le polynôme caractéristique de $T \in \mathcal{L}(V)$. Montrer que T est inversible si et seulement si $a_0 \neq 0$.
- On suppose que $T \in \mathcal{L}(V)$ est inversible. Montrer qu'il existe un polynôme $q \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ tel que $T^{-1} = q(T)$.