

Série 25

Le symbole \mathbb{F} désigne soit \mathbb{R} , soit \mathbb{C} , et V un \mathbb{F} -espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 1. Soit V un \mathbb{C} -espace vectoriel et soit $T \in \mathcal{L}(V)$. Supposons que V est la somme directe de sous-espaces U_1, \dots, U_k qui sont invariants par rapport à T et tels que $T|_{U_i}$ et $T|_{U_j}$ n'ont pas de valeur propres en commun si $i \neq j$. Montrer que $q_T(x) = \prod_{i=1}^k q_{T|_{U_i}}(x)$.

Exercice 2. Trouver $T_i \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$, $1 \leq i \leq 3$, tels que $q_{T_i}(x) = f_i(x)$, où

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x(x-1)^2, \quad f_3(x) = x^2(x-1)^2.$$

Exercice 3. (Plus dur) Supposons V est un \mathbb{C} -espace vectoriel. Soit $T \in \mathcal{L}(V)$. Montrer que T est diagonalisable si et seulement si $q_T(x)$ n'admet pas de racines multiples.

Exercice 4. Soit $T \in \mathcal{L}(V)$ et $v \in V$. Soit $p(x) \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ le polynôme unitaire de degré minimal tel que $p(T)(v) = 0$. Montrer que $p(x)$ divise $q_T(x)$.

Exercice 5. Donner un exemple d'un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^4)$ avec $c_T(x) = x(x-1)^2(x-3)$ et $q_T(x) = x(x-1)(x-3)$.

Exercice 6. Trouver une base de Jordan pour les opérateurs associés aux matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ une application linéaire de polynôme caractéristique $c_T(X) = (X - \lambda)^n$ tel que $\dim(\ker(T - \lambda \text{id})) = 1$ et soit $v_n \in \mathbb{R}^n$ tel que $(T - \lambda \text{id})^{n-1}(v_n) \neq 0$. On pose $v_{n-i} = (T - \lambda \text{id})^i(v_n)$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base de Jordan de T .

Application : Soit $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base de Jordan \mathcal{B} de T . En déduire l'expression de $[T^n]_{\mathcal{B}}$ pour tout $n > 0$.