

Série 26

Le symbole \mathbb{F} désigne soit \mathbb{R} , soit \mathbb{C} , et V un \mathbb{F} -espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 1. Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^4 muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme T dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- (a) Sans calculs, dire pourquoi T est diagonalisable dans une base orthonormée.
- (b) Montrer que T est une isométrie. En déduire les seules valeurs propres possibles pour T .
- (c) Déterminer à l'aide de la trace l'ordre de multiplicité des valeurs propres de T . En déduire le polynôme caractéristique de T .

Exercice 2. Supposons que V est muni d'un produit scalaire et que $v, w \in V$. Soit $T \in \mathcal{L}(V)$ défini par $Tu = \langle u, v \rangle w$. Calculer la trace de T .

Exercice 3. Supposons que V est un \mathbb{R} -espace vectoriel et que $T \in \mathcal{L}(V)$ est tel que $T^2 = -\text{id}_V$.

- (a) Donner des exemples de telles applications dans le cas $\dim(V) = 2$ ou 4 .
- (b) Montrer que de telles applications existent si et seulement si $\dim(V)$ est pair.