

Corrigé de la série 9

Correction exercice 1 On trouve que $((1, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1/2, 1/3))$ est une base de U . Donc $\dim U = 2$. S'il existe $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^5, \mathbb{F}^2)$ telle que $\ker T = U$, alors $5 = \dim \mathbb{F}^5 = \dim \ker T + \dim \operatorname{im} T = 2 + \dim \operatorname{im} T$. Ce qui force $\dim \operatorname{im} T = 3$. Mais $\operatorname{im} T$ est un sous-espace de \mathbb{F}^2 , donc $\dim \operatorname{im} T \leq 2$, ce qui est une contradiction.

Correction exercice 2

Si T existe, on a, par le théorème du rang :

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker} T) + \dim(\operatorname{Im} T).$$

Et donc $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$. Une condition nécessaire est donc donnée par cette relation. Montrons que cette relation est suffisante (c'est-à-dire que si $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$ alors il existe un tel T). Soit (e_1, \dots, e_p) une base de F que l'on complète en une base de E avec (e_{p+1}, \dots, e_n) . Soit (f_1, \dots, f_q) une base de G . On a $q = n - p$ donc (e_{p+1}, \dots, e_n) et (f_1, \dots, f_q) ont le même nombre d'éléments. Soit $T : E \rightarrow E$ l'application linéaire définie par :

$$T(e_i) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, p$$

$$T(e_{p+k}) = f_k \text{ pour } k = 1, \dots, q.$$

On vérifie facilement que $\operatorname{Ker}(T) = F$ et $\operatorname{Im}(T) = G$.

Correction exercice 3

 Par définition, on a que

$$\begin{aligned} T(x, y) &= xT(1, 0) + yT(0, 1) \\ &= x(1, 1) + y(1, 2) \\ &= (x + y, x + 2y). \end{aligned}$$

On trouve donc $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, et $d = 2$.

Correction exercice 4 (a) Soit $t \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_n, \mathcal{B}_m)$. On pose alors $F(t) = T$, où T est l'unique extension linéaire de la composition

$$\mathcal{B}_n \xrightarrow{t} \mathcal{B}_m \xrightarrow{i} \mathbb{F}^m,$$

où i est l'inclusion.

(b) Soit $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \in \mathbb{F}^n$, avec $\mathcal{B}_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Par définition de l'unique extension linéaire d'une application de \mathcal{B}_n dans \mathbb{F}^l on a

$$F(g \circ f)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (g \circ f)(e_i).$$

De la même manière, on a

$$F(f)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i).$$

Posons $\mathcal{B}_m = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_m\}$. Nécessairement, $\forall 1 \leq i \leq n$, il existe $1 \leq j_i \leq m$ tel que $f(e_i) = \epsilon_{j_i}$. En utilisant la définition de $F(g)$ on obtient alors

$$\begin{aligned} (F(g) \circ F(f))\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) &= F(g)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i)\right) \\ &= F(g)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \epsilon_{j_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i g(\epsilon_{j_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i g(f(e_i)) \end{aligned}$$

ce qui montre l'égalité $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

(c) Par définition, on a

$$\begin{aligned} F(\text{Id})\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \text{Id}(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i. \end{aligned}$$

Correction exercice 5 (a) Soit $t \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_m, V)$. On pose alors $\alpha_{f,h}(t) = h \circ t \circ f$. Il est évident que $\alpha_{f,h}(t) \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_n, W)$. Vérifions que cette application est linéaire.

Soit $t_1, t_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_m, V)$. Alors

$$\begin{aligned} \alpha_{f,h}(t_1 + t_2) &= h \circ (t_1 + t_2) \circ f \\ &= h \circ ((t_1 \circ f) + (t_2 \circ f)) \\ &= (h \circ t_1 \circ f) + (h \circ t_2 \circ f) \\ &= \alpha_{f,h}(t_1) + \alpha_{f,h}(t_2). \end{aligned}$$

(Le lecteur consciencieux devrait justifier chacune des égalités ci-dessus. A titre d'exemple, on justifie ici la deuxième égalité :

Pour montrer que deux applications de \mathcal{B}_n dans W coïncident, il faut vérifier que l'évaluation de chacune des deux applications sur un élément quelconque de \mathcal{B}_n donne le même vecteur de W . Soit donc $e \in \mathcal{B}_n$. Alors

$$\begin{aligned}
\left(h \circ ((t_1 \circ f) + (t_2 \circ f))\right)(e) &= h\left((t_1 \circ f)(e) + (t_2 \circ f)(e)\right), \\
&\text{par définition de l'addition dans } \mathcal{F}(\mathcal{B}_n, V) \\
&= h\left((t_1 + t_2) \circ f\right)(e), \\
&\text{par définition de l'addition dans } \mathcal{F}(\mathcal{B}_m, V).
\end{aligned}$$

Donc $h \circ ((t_1 \circ f) + (t_2 \circ f)) = h \circ (t_1 + t_2) \circ f$.

Soit $t \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_m, V)$ et $\lambda \in \mathbb{F}$. Alors

$$\begin{aligned}
\alpha_{f,h}(\lambda t) &= h \circ (\lambda t) \circ f \\
&= h \circ (\lambda(t \circ f)) \\
&= \lambda(h \circ t \circ f) \\
&= \lambda \alpha_{f,h}(t).
\end{aligned}$$

(A nouveau, le lecteur consciencieux devrait justifier chacune des égalités ci-dessus.)

(b) Soit $t \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^m, V)$. On pose alors $\beta_{g,h}(t) = h \circ t \circ g$. Vérifions que cette application est linéaire.

Soit $t_1, t_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^m, V)$. Alors

$$\begin{aligned}
\beta_{g,h}(t_1 + t_2) &= h \circ (t_1 + t_2) \circ g \\
&= h \circ (t_1 \circ g + t_2 \circ g) \\
&= h \circ t_1 \circ g + h \circ t_2 \circ g \\
&= \beta_{g,h}(t_1) + \beta_{g,h}(t_2).
\end{aligned}$$

(Le lecteur consciencieux devrait justifier chacune des égalités ci-dessus.)

Soit $t \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^m, V)$ et $\lambda \in \mathbb{F}$. Alors

$$\begin{aligned}
\beta_{g,h}(\lambda t) &= h \circ (\lambda t) \circ g \\
&= h \circ (\lambda(t \circ g)) \\
&= \lambda(h \circ t \circ g) \\
&= \lambda \beta_{g,h}(t).
\end{aligned}$$

(A nouveau, le lecteur consciencieux devrait justifier chacune des égalités ci-dessus.)

Correction exercice 6 Soit $t \in \mathcal{F}(\mathcal{B}_m, V)$. Pour montrer que

$$\beta_{F(f),h} G_{m,V}(t) = G_{n,W} \alpha_{f,h}(t),$$

il faut prendre $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \mathbb{F}^n$, avec $\mathcal{B}_n = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. Et montrer que

$$\beta_{F(f),h} G_{m,V}(t) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) = G_{n,W} \alpha_{f,h}(t) \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right).$$

Mais d'une part on a

$$\begin{aligned}
\beta_{F(f),h}G_{m,V}(t)\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) &= (h \circ G_{m,V}(t) \circ F(f))\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) \\
&= (h \circ G_{m,V}(t))\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i)\right) \\
&= (h \circ G_{m,V}(t))\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \epsilon_{j_i}\right) \\
&= h\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i t(\epsilon_{j_i})\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i h t f(e_i).
\end{aligned}$$

où $\mathcal{B}_m = \{\epsilon_1, \dots, \epsilon_m\}$ et où $f(e_i) = \epsilon_{j_i}$, comme pour l'exercice 4.
Et d'autre part on a

$$\begin{aligned}
G_{n,W}\alpha_{f,h}(t)\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) &= G_{n,W}(h \circ t \circ f)\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i h t f(e_i),
\end{aligned}$$

ce qui termine l'exercice.