EPFL
Algèbre linéaire
1ère année
2008-2009

Corrigé de la série 28

Exercice 1. 1. Admettons qu'il existe S et $T \in \mathcal{L}(V)$ tels que $S \circ T - T \circ S = \mathrm{Id}_V$. On a alors

$$\mathrm{Tr}\,(S \circ T - T \circ S) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{Id}_V).$$

On sait que Id_V est représentée par la matrice $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$ dans une base quelconque $\mathcal{B}$ de V. On obtient donc $\mathrm{Tr}\ \mathrm{Id}_V = n$.
D'un autre côté, on sait par le cours que

$$\mathrm{Tr}\,(S \circ T - T \circ S) = \mathrm{Tr}\,(S \circ T) - \mathrm{Tr}\,(T \circ S) = \mathrm{Tr}\,(S \circ T) - \mathrm{Tr}\,(S \circ T) = 0,$$

une contradiction car $n \neq 0$.

2. Considérons la matrice E_{ij} dont le terme à la i-ème ligne et j-ème colonne est égal à 1 et tous les autres termes de la matrice sont nuls. On a

$$AE_{ij} = \begin{pmatrix} & a_{1i} & \\ 0 & \vdots & 0 \\ & a_{ni} & \end{pmatrix}$$

où seule la j-ème colonne est non-nulle. D'où $\mathrm{Tr}\,(AE_{ij}) = a_{ji}$. De même on montre que $\mathrm{Tr}\,(BE_{ij}) = b_{ji}$. En faisant varier i et j on obtient

$$\forall (i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\} \quad a_{ji} = b_{ji}$$

d'où $A = B$.

3. Choissisons une base orthonormée $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de V. Rappelons la formule $u = \sum_{i=1}^n \langle u, u_i \rangle u_i$ pour tout $u \in V$. Les entrées diagonales de la matrice $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ sont données par

$$\langle Tu_i, u_i \rangle = \langle \langle u_i, v \rangle w, u_i \rangle = \langle u_i, v \rangle \langle w, u_i \rangle, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Alors on calcule :

$$\mathrm{Tr}\,(T) = \mathrm{Tr}\,([T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}) = \sum_{i=1}^n \langle u_i, v \rangle \langle w, u_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle \langle w, u_i \rangle u_i, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \langle w, u_i \rangle u_i, v \right\rangle = \langle w, v \rangle.$$

4. $V = \mathbb{R}^2$, $T(x,y) = (-y, x)$. Alors $T^2(x,y) = (-x,-y) = -(x,y)$. Donc T^2 a une valeur propre, $\lambda = -1$, de multiplicité 2. Alors $\mathrm{Tr}\,(T^2) = -2 < 0$.

5. Soit $\mathcal{B}$ une base de V de vecteurs propres de T. Alors $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. Par conséquent, $\mathrm{Tr}\,(T^2) = \lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 \geq 0$.

Exercice 2. 1. On choisit la matrice diagonale en blocs, $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & 1 & \\ & 0 & 1 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$, alors $T(w,x,y,z) = (0, x+y, y, 3z)$.

2. On peut choisir une matrice diagonale $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$, alors $T(w,x,y,z) = (0,x,y,3z)$.

Exercice 3.

1. Par exemple les opérateurs associés aux matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Supposons d'abord que $\dim(V)$ est pair. Soit $\dim(V) = 2n$ et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{2n})$ une base de V. Poser $T(e_{2k-1}) = -e_{2k}$ et $T(e_{2k}) = e_{2k-1}$ pour $1 \leq k \leq n$ détermine un opérateur linéaire $T \in \mathcal{L}(V)$. Son carré $T^2 \in \mathcal{L}(V)$ satisfait

$$T^2(e_{2k-1}) = T(-e_{2k}) = -T(e_{2k}) = -e_{2k-1}$$

et

$$T^2(e_{2k}) = T(e_{2k-1}) = -e_{2k}.$$

Il prend donc les mêmes valeurs sur $\mathcal{B}$ que l'opérateur $-\operatorname{Id}_V$. Il s'ensuit que $T^2 = -\operatorname{Id}_V$. Soit maintenant $\dim(V)$ impair et supposons qu'on ait $T \in \mathcal{L}(V)$ avec $T^2 = -\operatorname{Id}_V$. Alors

$$\det(T^2) = \det(-\operatorname{Id}_V) = (-1)^{\dim(V)} \det(\operatorname{Id}_V) = -1.$$

D'un autre côté, $\det(T^2) = (\det(T))^2 \geq 0$. Contradiction !

Exercice 4. 1. L'unique valeur propre de Id_V est 1 avec la multiplicité $n := \dim V$. Le polynôme caractéristique de Id_V est donc

$$c_{\operatorname{Id}_V} = (X-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i X^{n-i}.$$

On a donc $\det \operatorname{Id}_V = (-1)^n c_{\operatorname{Id}_V}(0) = (-1)^{2n} = 1$.

2. D'après le cours, on sait que $\det T = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$, où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de T (pas forcément toutes différentes).

   Si T est inversible, alors $\ker T = \{0\}$ et 0 n'est pas une valeur propre de T. On a alors $\lambda_i \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, n$ et donc $\det T \neq 0$. Réciproquement, si $\det T \neq 0$, alors on a $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ différents de 0 et donc $\ker T = \{0\}$ et T est inversible d'après le Théorème du Rang.

3. Soit $T \in \mathcal{L}(V)$ inversible. On montre que

$$\operatorname{Spec}(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \operatorname{Spec}(T)\}.$$

   Comme T est inversible, on a $\ker T = \{0\}$ et 0 n'est pas une valeur propre de T. Pour la même raison, 0 n'est pas une valeur propre de T^{-1}. Soit $\lambda \in \operatorname{Spec}(T)$ et $v \neq 0$ un vecteur propre de T pour la valeur propre λ. Soit $w = \lambda v \neq 0$. On a $w = T(v)$ et donc

$T^{-1}(w) = v = \lambda^{-1}w$. Donc λ^{-1} est une valeur propre de T^{-1}. On a donc $\{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{Spec}(T)\} \subseteq \mathrm{Spec}(T^{-1})$. Comme T est l'inverse de T^{-1}, on montre de la même façon que $\{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{Spec}(T^{-1})\} \subseteq \mathrm{Spec}(T)$, ce qui termine la preuve. On a donc

$$\det T^{-1} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}\, T} \lambda^{-1} = \left(\prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}\, T} \lambda \right)^{-1} = (\det T)^{-1}.$$

4. On montre facilement, en différenciant les deux cas $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$, que

$$\mathrm{Spec}(\alpha T) = \{\alpha\lambda \mid \lambda \in \mathrm{Spec}(T)\}.$$

   On a donc

$$\det(\alpha T) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}\, T} (\alpha\lambda) = \alpha^n \cdot \prod_{\lambda \in \mathrm{Spec}\, T} \lambda = \alpha^n \det T.$$

5. On a d'après le cours, pour une base $\mathcal{B}$ quelconque de V :

$$\begin{aligned} \det(T_1 \circ T_2) &= \det\left([T_1 \circ T_2]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\right) = \det\left([T_1]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \cdot [T_1]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\right) \\ &= \det\left([T_1]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\right) \cdot \det\left([T_1]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\right) = \det(T_1) \cdot \det(T_2). \end{aligned}$$