

## Corrigé de la série 4

**Exercice 1.** 1. Les vecteurs  $e_1 = (1, 0, 0)$  et  $e_2 = (0, 1, 0)$  sont linéairement indépendants car

$$ae_1 + be_2 = 0 \Rightarrow (a, b, 0) = 0 \Rightarrow a = b = 0.$$

Comme  $e_3 = (0, 0, 1) \notin \text{span}(e_1, e_2)$ , la liste  $(e_1, e_2)$  n'est pas une liste génératrice de  $\mathbb{F}^3$ .

2. On prend par exemple  $e_1, e_2, e_3$  définis comme en haut, ainsi que  $e_1 + e_2$ .

3. On utilise la méthode de la preuve du lemme du vecteur superflu.

On remarque que

$$\frac{1}{3}((3, 1, 0, 0) + (0, -1, 3, 0)) = (1, 0, 1, 0).$$

On peut donc enlever  $(1, 0, 1, 0)$  de la liste sans changer le sous-espace engendré. On a donc

$$\begin{aligned} & \text{span}((3, 1, 0, 0), (0, -1, 3, 0), (1, 0, 1, 0), (-2, 0, 3, 0), (-2, 1, 0, 0)) \\ &= \text{span}((3, 1, 0, 0), (0, -1, 3, 0), (-2, 0, 3, 0), (-2, 1, 0, 0)). \end{aligned}$$

Ensuite on remarque que

$$(-2, 0, 3, 0) - (0, -1, 3, 0) = (-2, 1, 0, 0),$$

et on obtient de même

$$\begin{aligned} & \text{span}((3, 1, 0, 0), (0, -1, 3, 0), (-2, 0, 3, 0), (-2, 1, 0, 0)) \\ &= \text{span}((3, 1, 0, 0), (0, -1, 3, 0), (-2, 0, 3, 0)). \end{aligned}$$

On constate que la liste

$$((3, 1, 0, 0), (0, -1, 3, 0), (-2, 0, 3, 0))$$

est linéairement indépendante. En effet, si

$$a(3, 1, 0, 0) + b(0, -1, 3, 0) + c(-2, 0, 3, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

alors

$$(3a - 2c, a - b, 3b + 3c, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

c'est-à-dire que  $a = b$ ,  $b = -c$  et  $3a = 2c = -2b$ . Donc  $3b = -2b$ , d'où  $b = 0$ . Mais cela implique aussi  $a = c = 0$ .

On a de plus

$$\begin{aligned} (3, 1, 0, 0) + (0, -1, 3, 0) - (-2, 0, 3, 0) &= (5, 0, 0, 0) \\ 2(3, 1, 0, 0) - 3(0, -1, 3, 0) + 3(-2, 0, 3, 0) &= (0, 5, 0, 0) \\ 2(3, 1, 0, 0) + 2(0, -1, 3, 0) + 3(-2, 0, 3, 0) &= (0, 0, 15, 0) \end{aligned}$$

Donc

$$\text{span}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)) \subseteq \text{span}((3, 1, 0, 0), (0, -1, 3, 0), (-2, 0, 3, 0)).$$

De manière évidente, on a

$$\text{span}((3, 1, 0, 0), (0, -1, 3, 0), (-2, 0, 3, 0)) \subseteq \text{span}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)).$$

Les deux ensembles sont donc égaux.

Soit  $(v_1, \dots, v_n)$  une liste génératrice quelconque de  $U$ . D'après le Théorème de la borne, comme  $((3, 1, 0, 0), (0, -1, 3, 0), (-2, 0, 3, 0))$  sont linéairement indépendants, on a  $n \geq 3$ .

4. On a  $v = (x_1, x_2, x_3) \in U$  ssi  $x_1 = 2x_2$  et  $x_3 = x_1 + x_2 = 3x_2$ . Donc  $v$  est un vecteur de  $U$  ssi  $v = (2t, t, 3t)$  avec  $t \in \mathbb{F}$ . On a donc  $U = \text{span}((2, 1, 3))$ .

**Exercice 2.** On considère les fonctions  $f_i \in E$ ,  $i = 1, \dots, n$ , définies par

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j \end{cases}$$

pour  $j = 1, \dots, n$ . Soit  $f \in E$  quelconque. On vérifie que  $f = f(x_1)f_1 + \dots + f(x_n)f_n$ . Cela signifie que  $E \subseteq \text{span}(f_1, \dots, f_n)$  et donc  $E = \text{span}(f_1, \dots, f_n)$ , ce qui implique que  $E$  est de dimension finie. On remarque que les fonctions  $f_1, \dots, f_n$  sont linéairement indépendantes : si  $a_1f_1 + \dots + a_nf_n = 0$ , on a  $0 = (a_1f_1 + \dots + a_nf_n)(x_j) = a_j$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Comme dans le troisième point de l'exercice précédent, on en conclut qu'une liste génératrice de  $E$  a au moins  $n$  éléments.

**Exercice 3.** 1. Si  $a(u + v - 2w) + b(u - v - w) + c(u + w) = 0$ , on a  $(a + b + c)u + (a - b)v + (-2a - b + c)w = 0$ . Comme  $u, v$  et  $w$  sont linéairement indépendants, cela implique

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a - b = 0 \\ -2a - b + c = 0. \end{cases}$$

On a donc  $a = b$ ,  $2a + c = 0$  et  $-3a + c = 0$ , ou bien  $a = b$ ,  $c = -2a$  et  $5a = 0$ . On en conclut que  $a = b = c = 0$ .

2. Si  $(u + z, v + z, w + z)$  est linéairement dépendante, il existe  $a, b, c \in F$  tels que  $(a, b, c) \neq 0$  et

$$a(u + z) + b(v + z) + c(w + z) = 0.$$

Cela implique  $-(a + b + c)z = au + bv + cw$ . Si  $a + b + c = 0$ , on a  $au + bv + cw = 0$ , ce qui implique  $a = b = c = 0$  car  $u, v$  et  $w$  sont linéairement indépendants. Ceci est en contradiction avec notre choix de  $a, b, c$ . Donc on a  $a + b + c \neq 0$ , et on peut écrire

$$z = \frac{-a}{a + b + c}u + \frac{-b}{a + b + c}u + \frac{-c}{a + b + c}u.$$

Ceci implique  $z \in \text{span}(u, v, w)$ .

Pour montrer que la condition n'est pas nécessaire, il suffit de considérer  $u = (1, 0, 0)$ ,  $v = (0, 1, 0)$ ,  $w = (0, 0, 1)$ , et  $z = (2, 0, 0)$  dans  $\mathbb{F}^3$ . On a bien  $z \in \text{span}(u, v, w)$ , mais  $u + z = (3, 0, 0)$ ,  $v + z = (1, 1, 0)$  et  $w + z = (1, 0, 1)$  sont linéairement indépendants.

**Exercice 4.** 1. Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $af_1 + bf_2 = 0$ . On a dans ce cas  $0 = (af_1 + bf_2)(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot e^0 = b$ , et, de la même manière,  $0 = (af_1 + bf_2)(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot e^1 = a + be$ . Cela implique immédiatement  $a = b = 0$ .

2. Soit  $N \subseteq M$  un sous-ensemble fini, et soit  $m$  le nombre d'éléments de  $N$ . On peut donc écrire  $N = \{g_{x_1}, \dots, g_{x_m}\}$  avec  $x_1, \dots, x_m \in [0, 1]$ . Si  $a_1g_{x_1} + \dots + a_mg_{x_m} = 0$ , on a pour chaque  $j \in \{1, \dots, m\}$  :

$$0 = (a_1g_{x_1} + \dots + a_mg_{x_m})(x_j) = a_1g_{x_1}(x_j) + \dots + a_mg_{x_m}(x_j) = a_j.$$

Cela montre que l'ensemble  $N$  est linéairement indépendant.

On montre par l'absurde que  $V$  est de dimension infinie. Admettons que  $V$  est de dimension finie. Alors il existe une liste génératrice  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $V$ . D'après le Théorème de la borne, si  $(u_1, \dots, u_k)$  est une liste linéairement indépendante de vecteurs de  $V$ , on a automatiquement  $k \leq n$ . Mais en choisissant un nombre entier  $K > n$  et  $K$  nombres réels différents  $x_1, \dots, x_K \in [0, 1]$ , et d'après les considérations ci-dessus, la liste  $(g_{x_1}, \dots, g_{x_K})$  est une liste linéairement indépendante composée de  $K$  éléments de  $V$ , une contradiction.

3. Soit  $f \in \text{span}(M)$ . D'après la définition du Span d'un ensemble, cela veut dire qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_1, \dots, f_n \in M$ , et  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$  tels que

$$f = \sum_{i=1}^n a_i f_i.$$

Soit, pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $x_i \in [0, 1]$  le nombre réel tel que  $f_i = g_{x_i}$ . On montre que

$$f(x) = 0 \text{ si } x \in [0, 1] \setminus \{x_1, \dots, x_n\}.$$

En effet, si  $x \neq x_i$  pour chaque  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $g_{x_i}(x) = 0$  pour chaque  $i$  et donc  $f(x) = \sum_{i=1}^n a_i g_{x_i}(x) = 0$ . Donc on a  $\{x \in [0, 1] \mid f(x) \neq 0\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$ , qui est bien un ensemble fini.

Soit maintenant  $f$  un élément de  $V$  tel que :  $\{x \in [0, 1] \mid f(x) \neq 0\}$  est un ensemble fini. On trouve donc  $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$  tels que  $f(x_i) \neq 0$  pour  $i = 1, \dots, n$ , et  $f(x) = 0$  si  $x \in [0, 1]$  n'est pas dans cette liste. On peut donc écrire  $f = \sum_{i=1}^n f(x_i)g_{x_i}$ , qui est bien un élément de  $\text{span}(M)$ .

**Exercice 5.** Soit  $\mathcal{F} := \{(1, x, x^2) \mid x \in \{1, \dots, 1000\}\}$ . On montre que chaque sous-ensemble de  $\mathcal{F}$  contenant exactement trois vecteurs est linéairement indépendant. Soient  $x, y, z \in \{1, \dots, 1000\}$  trois nombres entiers différents. L'équation  $a(1, x, x^2) + b(1, y, y^2) + c(1, z, z^2) = 0$  est équivalente à

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ xa + yb + zc = 0 \\ x^2a + y^2b + z^2c = 0. \end{cases}$$

On résout ce système à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. On a

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ (x - z)a + (y - z)b = 0 \\ (x^2 - z^2)a + (y^2 - z^2)b = 0. \end{cases}$$

Comme  $y^2 - z^2 = (y + z)(y - z)$ , on continue et on obtient

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ (x - z)a + (y - z)b = 0 \\ ((x^2 - z^2) - (x - z)(y + z))a = 0. \end{cases}$$

La dernière ligne nous donne  $(x - z)((x + z) - (y + z))a = (x - z)(x - y)a = 0$ . Comme  $x \neq z$  et  $x \neq y$ , on a  $x - z \neq 0 \neq x - y$  et donc  $a = 0$ . Cela nous donne  $(y - z)b = 0$  dans la deuxième ligne, et donc par un argument analogue  $b = 0$ . On en conclut que  $a = b = c = 0$ .