

Corrigé du test 1 du 14 novembre 2008.  
Algèbre linéaire I.

1. Soient  $V$  et  $W$  deux  $\mathbb{F}$ -espaces vectoriels.

- (a) Définir une structure de  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel sur  $V \times W$ , provenant de celles de  $V$  et de  $W$ . (Vous n'êtes pas obligé de vérifier tous les axiomes, mais de dire et justifier quel est le zéro et comment former les inverses additifs.)

*Les opérations sont :*

– *L'addition*

$$\begin{aligned} \text{add} : (V \times W) \times (V \times W) &\rightarrow V \times W, \\ ((v, w), (v', w')) &\mapsto (v +_V v', w +_W w'), \end{aligned}$$

où  $+_V$  est la somme dans l'espace vectoriel  $V$ , et  $+_W$  la somme dans  $W$ .

– *La multiplication*

$$\begin{aligned} \text{mult} : \mathbb{F} \times (V \times W) &\rightarrow V \times W, \\ (\alpha, (v, w)) &\mapsto (\alpha \cdot_V v, \alpha \cdot_W w), \end{aligned}$$

où  $\cdot_V$  est la multiplication dans l'espace vectoriel  $V$ , et  $\cdot_W$  la multiplication dans  $W$ .

Le zéro de  $V \times W$  est  $(0_V, 0_W)$ , car

$$(0_V, 0_W) + (v, w) = (0_V + v, 0_W + w) = (v, w)$$

pour tout  $(v, w) \in V \times W$ .

L'inverse additif de  $(v, w)$  est  $(-v, -w)$  pour tout  $(v, w) \in V \times W$ .

En effet

$$(v, w) + (-v, -w) = (v + (-v), w + (-w)) = (0_V, 0_W).$$

- (b) Montrer que si  $V$  et  $W$  sont de dimension finie, alors  $V \times W$  l'est également et  $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$ .

Comme  $V$  et  $W$  sont des espaces vectoriels de dimension finie ( $\dim V =: n$  et  $\dim W =: m$ ), on peut choisir une base  $(v_1, \dots, v_n)$  de  $V$  et une base  $(w_1, \dots, w_m)$  de  $W$ .

On montre que

$$\mathcal{B} := ((v_1, 0_W), \dots, (v_n, 0_W), (0_V, w_1), \dots, (0_V, w_m))$$

est une base de  $V \times W$  :

– Liste génératrice :

Soit  $(v, w) \in V \times W$ . Puisque  $(v_1, \dots, v_n)$  et  $(w_1, \dots, w_m)$  engendrent, respectivement,  $V$  et  $W$ , il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$  et des scalaires  $\mu_1, \dots, \mu_m$  tels que  $w = \sum_{j=1}^m \mu_j w_j$ . On a alors  $(v, w) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (v_i, 0_W) + \sum_{j=1}^m \mu_j (0_V, w_j)$ . Donc  $\mathcal{B}$  engendre  $V \times W$ .

– Indépendance linéaire :

Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$  des scalaires tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i (v_i, 0_W) + \sum_{j=1}^m \mu_j (0_V, w_j) = 0$ . On a alors  $(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^m \mu_j w_j) = (0_V, 0_W)$  d'où  $\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0_V$  et  $\sum_{j=1}^m \mu_j w_j = 0_W$  et donc  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$  puisque  $(v_1, \dots, v_n)$  et  $(w_1, \dots, w_m)$  sont linéairement indépendantes. On en déduit que  $\mathcal{B}$  est une famille linéairement indépendante de  $V \times W$ .

Par conséquent,  $V \times W$  est de dimension finie. En particulier, on a montré que

$$\dim(V \times W) = n + m = \dim V + \dim W.$$

2. Soient  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  et  $Y = \{y_1, y_2\}$ . Soit  $V = \mathcal{F}(X \times Y, \mathbb{F})$

(a) Trouver une base de  $V$  et calculer  $\dim V$ . Justifier votre réponse.

Soit  $f_{ij} : X \times Y \rightarrow \mathbb{F}$  l'application définie par

$$\begin{aligned} f_{ij}(x_k, y_l) &= \begin{cases} 1, & i = k, j = l \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \\ &= \delta_{ik} \delta_{jl}. \end{aligned}$$

On montre que

$$\mathcal{B} = (f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}, f_{31}, f_{32})$$

est une base de  $V$ . Par conséquent  $\dim V = 6$ .

– La liste est linéairement indépendante, car si  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} f_{ij} = 0$ , alors

$$0 = \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} f_{ij} \right) (x_k, y_l) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} f_{ij}(x_k, y_l) = \alpha_{kl}$$

pour  $k = 1, 2, 3$  et  $l = 1, 2$ .

– La liste est génératrice, car  $\forall f \in \mathcal{F}(X \times Y, \mathbb{F})$ , on peut écrire

$$f = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 f(x_i, y_j) f_{ij}.$$

En effet, on a

$$\left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 f(x_i, y_j) f_{ij} \right) (x_k, y_l) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 f(x_i, y_j) \delta_{ik} \delta_{jl} = f(x_k, y_l)$$

pour  $k = 1, 2, 3$  et  $l = 1, 2$ . Les deux fonctions  $f$  et  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 f(x_i, y_j) f_{ij}$  ont donc la même valeur sur chaque élément de  $X \times Y$  et sont par conséquent égales.

(b) Soit  $U = \{f \in V \mid f(x_1, y_2) = f(x_2, y_2) = f(x_3, y_2)\}$ . Montrer que  $U$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ . On doit montrer

–  $U \neq \emptyset$  :

La fonction nulle  $\bar{0} : X \times Y \rightarrow \mathbb{F}$ ,  $(x_i, y_j) \mapsto 0$  est un élément de  $U$ , car  $0 = \bar{0}(x_1, y_2) = \bar{0}(x_2, y_2) = \bar{0}(x_3, y_2)$ .

– Pour  $f, g \in U$ , on a  $f + g \in U$  :

Soient  $f$  et  $g \in U$ . On a

$$\begin{aligned} (f + g)(x_1, y_2) &= f(x_1, y_2) + g(x_1, y_2) = f(x_2, y_2) + g(x_2, y_2) \\ &= (f + g)(x_2, y_2) \\ &= f(x_3, y_2) + g(x_3, y_2) = (f + g)(x_3, y_2). \end{aligned}$$

Donc  $f + g$  est un élément de  $U$ .

– Pour  $f \in U$  et  $\alpha \in \mathbb{F}$ , on a  $\alpha f \in U$  :

Soit  $f \in U$  et  $\alpha \in \mathbb{F}$ . Les égalités

$$\begin{aligned} (\alpha f)(x_1, y_2) &= \alpha f(x_1, y_2) = \alpha f(x_2, y_2) \\ &= (\alpha f)(x_2, y_2) \\ &= \alpha f(x_3, y_2) = (\alpha f)(x_3, y_2) \end{aligned}$$

montrent que  $\alpha f$  est un élément de  $U$ .

(c) Trouver un sous-espace  $W$  de  $V$  tel que  $U \oplus W = V$ . Justifier votre réponse. On montre tout d'abord que

$$\mathcal{B}' := (f_{11}, f_{21}, f_{31}, g := f_{12} + f_{22} + f_{32})$$

est une base de  $U$ . Notons d'abord que  $f_{11}, f_{21}, f_{31}$ , et  $g$  sont des éléments de  $U$ , donc  $\text{span}(\mathcal{B}') \subseteq U$ . Si  $f$  est un élément de  $U$ , on a  $f(x_1, y_2) = f(x_2, y_2) = f(x_3, y_2) =: \beta$ . On écrit comme avant

$$f = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 f(x_i, y_j) f_{ij},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} f &= f(x_1, y_1)f_{11} + f(x_2, y_1)f_{21} + f(x_3, y_1)f_{31} + \beta f_{12} + \beta f_{22} + \beta f_{32} \\ &= f(x_1, y_1)f_{11} + f(x_2, y_1)f_{21} + f(x_3, y_1)f_{31} + \beta(f_{12} + f_{22} + f_{32}) \\ &= f(x_1, y_1)f_{11} + f(x_2, y_1)f_{21} + f(x_3, y_1)f_{31} + \beta g \in \text{span}(\mathcal{B}'). \end{aligned}$$

Donc  $\mathcal{B}'$  est une liste génératrice de  $U$ .

L'égalité  $\alpha_{11}f_{11} + \alpha_{21}f_{21} + \alpha_{31}f_{31} + \beta(f_{12} + f_{22} + f_{32}) = 0$  implique

$$0 = \alpha_{11}f_{11} + \alpha_{21}f_{21} + \alpha_{31}f_{31} + \beta f_{12} + \beta f_{22} + \beta f_{32},$$

et donc immédiatement  $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = \beta = 0$  car  $(f_{11}, f_{21}, f_{31}, f_{12}, f_{22}, f_{32})$  est linéairement indépendante. La liste  $\mathcal{B}'$  est donc linéairement indépendante.

On complète  $\mathcal{B}'$  en une base de  $V$  :

$$(f_{11}, f_{21}, f_{31}, g, f_{12}, f_{22}).$$

L'indépendance linéaire est montrée de la même façon que précédemment : si

$$\alpha_{11}f_{11} + \alpha_{21}f_{21} + \alpha_{31}f_{31} + \beta g + \alpha_{12}f_{12} + \alpha_{22}f_{22} = 0,$$

alors

$$\alpha_{11}f_{11} + \alpha_{21}f_{21} + \alpha_{31}f_{31} + (\beta + \alpha_{12})f_{12} + (\beta + \alpha_{22})f_{22} + \beta f_{32} = 0,$$

et donc

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{31} = \beta + \alpha_{12} = \beta + \alpha_{22} = \beta = 0.$$

Cela implique  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{31} = \alpha_{12} = \alpha_{22} = \beta = 0$ .

On a pour  $f \in V$

$$\begin{aligned} f &= f(x_1, y_1)f_{11} + f(x_2, y_1)f_{21} + f(x_3, y_1)f_{31} + f(x_3, y_2)g \\ &\quad + (f(x_1, y_2) - f(x_3, y_2))f_{12} + (f(x_2, y_2) - f(x_3, y_2))f_{22}. \end{aligned}$$

Donc  $V \subseteq \text{span}(f_{11}, f_{21}, f_{31}, g, f_{12}, f_{13})$  et on a égalité.

Par conséquent, si on pose  $W := \text{span}(f_{12}, f_{13})$ , on obtient  $V = U \oplus W$ . (La somme est directe car d'après ce qui précède, on a  $\dim V = 6 = 4 + 2 = \dim U + \dim W$ .) Notons que

$$W = \{f \in V \mid f(x_i, y_j) \neq 0 \Rightarrow i = 1 \text{ et } j = 2 \text{ ou } i = j = 2\}.$$

3. Indiquer la bonne réponse par une croix, et ensuite justifier votre réponse.

(a) Soient  $q_1(x), q_2(x), \dots, q_7(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) \setminus \{0\}$ . Si

$$\text{span}(q_1(x), \dots, q_7(x)) = \text{span}(q_1(x)) \oplus \dots \oplus \text{span}(q_7(x)), (*)$$

est-il possible que  $n = 5$  ?

*La réponse est NON. Justification : On a  $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) = 6$  si  $n = 5$ , donc aucune liste linéairement indépendante n'a plus de 6 éléments. Or, (\*) est équivalent à  $(q_1(x), \dots, q_7(x))$  linéairement indépendante.*

(b) Soient  $V$  et  $W$  des  $\mathbb{F}$ -espaces vectoriels. Soient  $S$  et  $T$  des applications linéaires de  $V$  vers  $W$ , et soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ . Est-ce que l'application

$$\alpha \cdot S + \beta \cdot T : V \rightarrow W$$

est linéaire ? (Ici, la somme de deux applications et la multiplication d'une application par un scalaire sont définies comme d'habitude.)

*La réponse est OUI. Justification : On calcule, pour  $v, v' \in V$ ,*

$$\begin{aligned} (\alpha S + \beta T)(v + v') &\stackrel{\text{déf. de } + \text{ d'applications}}{=} (\alpha S)(v + v') + (\beta T)(v + v') \\ &\stackrel{\text{déf. de } \cdot \text{ d'appl.}}{=} \alpha S(v + v') + \beta T(v + v') \\ &\stackrel{\text{additivité de } S, T}{=} \alpha(S(v) + S(v')) + \beta(T(v) + T(v')) \\ &= (\alpha S(v) + \beta T(v)) + (\alpha S(v') + \beta T(v')) \\ &= (\alpha S + \beta T)(v) + (\alpha S + \beta T)(v'). \end{aligned}$$

*Donc l'application  $\alpha S + \beta T$  est additive.*

*Soient maintenant  $v \in V$  et  $r \in \mathbb{F}$ . On calcule*

$$\begin{aligned} (\alpha S + \beta T)(rv) &= \alpha S(rv) + \beta T(rv) \\ &= \alpha r S(v) + \beta r T(v) \quad \text{car } S, T \text{ homogènes} \\ &= r(\alpha S(v) + \beta T(v)) \\ &= r(\alpha S + \beta T)(v). \end{aligned}$$

*On a donc montré que  $\alpha S + \beta T$  est homogène.*

(c) Soit  $V$  un  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel de dimension finie. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $U_n$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . Supposer que

$$U_{n_1} + \dots + U_{n_k} = U_{n_1} \oplus \dots \oplus U_{n_k} \quad (**)$$

quelques soient  $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_k$  et quelque soit  $k$ . Est-il possible que  $U_m \neq U_n$  chaque fois que  $m \neq n$ , i.e., que tous les  $U_n$  soient distincts ?

La réponse est NON. Justification : Si  $m \neq n$  implique  $U_m \neq U_n$ , alors il existe au plus un  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $U_n = \{0\}$ . Par conséquent, (\*\*) implique que pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , il existe un sous-espace  $U$  de  $V$  tel que  $\dim U \geq d$ . En effet, comme on peut choisir  $U_{n_1}, \dots, U_{n_d}$  tels que  $U_{n_i} \neq \{0\}$  pour  $i = 1, \dots, d$ , on a

$$\begin{aligned} \dim(U_{n_1} + \dots + U_{n_d}) &= \dim(U_{n_1} \oplus \dots \oplus U_{n_d}) \\ &= \sum_{i=1}^d \underbrace{\dim U_{n_i}}_{\geq 1} \geq d. \end{aligned}$$

Ainsi, on a  $\dim V \geq d$  pour tout  $d \in \mathbb{N}$ , ce qui implique que  $\dim V = \infty$ .

4. Ci-dessous la notation  $\mathbb{F}$  veut dire soit  $\mathbb{R}$ , soit  $\mathbb{C}$ .

(a) Donner la définition complète d'un  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel.

*Voir le cours !*

(b) Montrer que  $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , muni de deux opérations

$$\text{add} : V \times V \rightarrow V : (f, g) \mapsto g \circ f$$

et

$$\text{mult} : \mathbb{R} \times V \rightarrow V : (\alpha, f) \mapsto \alpha \cdot f,$$

où  $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot (f(x))$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , n'est pas un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

Plusieurs axiomes ne sont pas satisfaits, par exemple :

– L'opération  $\text{add}$  n'est pas commutative (axiome V1). En effet, on a pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x^2$ , et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto x + 2$  :

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 2 \text{ tandis que } (f \circ g)(x) = (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4,$$

donc  $\text{add}(g, f) \neq \text{add}(f, g)$ .

– Les axiomes de distributivité (axiome V6) ne sont pas satisfaits :

i. On a, si  $f$  est définie comme ci-dessus :

$$(3 + 2)f(x) = 5x^2 \quad \text{et} \quad (2f) \circ (3f)(x) = 2(3x^2)^2 = 18x^2,$$

donc l'égalité

$$\text{mult}(\alpha + \beta, f) = \text{add}(\text{mult}(\alpha, f), \text{mult}(\beta, f))$$

n'est pas vraie pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  et  $f \in V$ .

ii. Si  $f$  et  $g$  sont définies comme plus haut, on a

$$3(f \circ g)(x) = 3(x^2 + 4x + 4)$$

mais

$$((3f) \circ (3g))(x) = 3(3(x+2))^2 = 27(x^2 + 4x + 4),$$

donc

$$\text{mult}(\alpha, \text{add}(g, f)) = \text{add}(\text{mult}(\alpha, g), \text{mult}(\alpha, f))$$

n'est pas vraie pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f, g \in V$ .

- (c) Soit  $V$  un  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel. Montrer que si  $\alpha \in \mathbb{F}$  et  $\vec{v} \in V$ , alors

$$\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0} \text{ si et seulement si } \alpha = 0 \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}.$$

Justifier chaque pas de votre argument en faisant appel aux axiomes d'espace vectoriel.

$\Leftarrow$  : On a  $0v = (0+0)v \stackrel{\text{axiome } V6}{=} 0v + 0v$ . Donc, puisque par (V4) il existe  $w \in V$  tel que  $0v + w = 0$ , on peut écrire

$$0 = 0v + w = (0v + 0v) + w \stackrel{V2}{=} 0v + (0v + w) = 0v + 0 \stackrel{V3}{=} 0v.$$

On a  $\alpha 0 = \alpha(0+0) \stackrel{V6}{=} \alpha 0 + \alpha 0$ . Soit  $w \in V$  tel que  $\alpha 0 + w = 0$  (existe par (V4)). Alors on peut écrire

$$0 = \alpha 0 + w = (\alpha 0 + \alpha 0) + w \stackrel{V2}{=} \alpha 0 + (\alpha 0 + w) = \alpha 0 + 0 \stackrel{V3}{=} \alpha 0.$$

$\Rightarrow$  : Si  $\alpha v = 0$  et  $\alpha \neq 0$ , alors il existe  $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{F}$  et

$$0 = \frac{1}{\alpha} 0 = \frac{1}{\alpha} (\alpha v) \stackrel{V2}{=} \left(\frac{1}{\alpha}\right)v = 1v \stackrel{V5}{=} v,$$

où on a utilisé le deuxième point de la preuve de  $\Leftarrow$  pour la première égalité.

- (d) Montrer que si  $V$  est un  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel tel que  $V \neq \{\vec{0}\}$ , alors  $V$  contient un nombre infini de vecteurs distincts.

Si  $V \neq \{0\}$ , alors il existe  $v \in V$  tel que  $v \neq 0$ . Soient  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{F}$  tels que  $\alpha \neq \beta$ . Alors, comme  $v \neq 0$  et  $\alpha - \beta \neq 0$ , on obtient  $(\alpha - \beta)v \neq 0$  par l'exercice précédent.

Ainsi,  $\alpha \neq \beta$  implique  $\alpha v \neq \beta v$ . Par conséquent, comme  $\mathbb{F}$  possède un nombre infini d'éléments distincts,  $V$  possède également un nombre infini d'éléments distincts.

- (e) Donner un exemple d'un  $\mathbb{F}$ -espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie. Justifier votre réponse.

*L'espace vectoriel  $\mathcal{P}(\mathbb{F})$  des polynômes n'est pas de dimension finie : Soit  $(p_1, \dots, p_n)$  une liste de polynômes, et soit*

$$d := \max_{i=1, \dots, n}(\text{degré } p_i).$$

*Alors*

$$\text{degré} \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i \right) \leq d \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F},$$

*ce qui équivaut à*

$$\text{span}(p_1, \dots, p_n) \subseteq \mathcal{P}_d(\mathbb{F}).$$

*Donc  $(p_1, \dots, p_n)$  ne peut pas être une liste génératrice de  $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ .*