Corrigé du test 1 du 14 novembre 2008.
Algèbre linéaire I.

1. Soient V et W deux $\mathbb{F}$-espaces vectoriels.
   (a) Définir une structure de $\mathbb{F}$-espace vectoriel sur $V \times W$, provenant de celles de V et de W. (Vous n'êtes pas obligé de vérifier tous les axiomes, mais de dire et justifier quel est le zéro et comment former les inverses additifs.)

   Les opérations sont :
   – *L'addition*

$$\begin{array}{rrcl} \text{add} & : & (V \times W) \times (V \times W) & \rightarrow & V \times W, \\ & & ((v,w),(v',w')) & \mapsto & (v +_V v', w +_W w'), \end{array}$$

   où $+_V$ est la somme dans l'espace vectoriel V, et $+_W$ la somme dans W.
   – *La multiplication*

$$\begin{array}{rrcl} \text{mult} & : & \mathbb{F} \times (V \times W) & \rightarrow & V \times W, \\ & & (\alpha,(v,w)) & \mapsto & (\alpha \cdot_V v, \alpha \cdot_W w), \end{array}$$

   où $\cdot_V$ est la multiplication dans l'espace vectoriel V, et $\cdot_W$ la multiplication dans W.

   Le zéro de $V \times W$ est $(0_V, 0_W)$, car

$$(0_V, 0_W) + (v,w) = (0_V + v, 0_W + w) = (v,w)$$

   pour tout $(v,w) \in V \times W$.
   L'inverse additif de (v,w) est $(-v,-w)$ pour tout $(v,w) \in V \times W$. En effet

$$(v,w) + (-v,-w) = (v + (-v), w + (-w)) = (0_V, 0_W).$$

   (b) Montrer que si V et W sont de dimension finie, alors $V \times W$ l'est également et $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$.

Comme V et W sont des espaces vectoriels de dimension finie ($\dim V =: n$ et $\dim W =: m$), on peut choisir une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de V et une base $(w_1, \ldots, w_m)$ de W.

On montre que

$$\mathcal{B} := ((v_1, 0_W), \ldots, (v_n, 0_W), (0_V, w_1), \ldots, (0_V, w_m))$$

est une base de $V \times W$ *:*

- *Liste génératrice :*
  Soit $(v, w) \in V \times W$. *Puisque* $(v_1, \ldots, v_n)$ *et* $(w_1, \ldots, w_m)$ *engendrent, respectivement,* V *et* W, *il existe des scalaires* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *tels que* $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ *et des scalaires* $\mu_1, \ldots, \mu_m$ *tels que* $w = \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j$. *On a alors* $(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i, 0_W) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j (0_V, w_j)$. *Donc* $\mathcal{B}$ *engendre* $V \times W$.
- *Indépendance linéaire :*
  Soient $\lambda_1, \ldots \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m$ *des scalaires tels que* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (v_i, 0_W) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j (0_V, w_j) = 0$. *On a alors* $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j) = (0_V, 0_W)$ *d'où* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0_V$ *et* $\sum_{j=1}^{m} \mu_j w_j = 0_W$ *et donc* $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$ *puisque* $(v_1, \ldots, v_n)$ *et* $(w_1, \ldots, w_k)$ *sont linéairement indépendantes. On en déduit que* $\mathcal{B}$ *est une famille linéairement indépendante de* $V \times W$.

Par conséquent, $V \times W$ *est de dimension finie. En particulier, on a montré que*

$$\dim(V \times W) = n + m = \dim V + \dim W.$$

2. Soient $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $Y = \{y_1, y_2\}$. Soit $V = \mathcal{F}(X \times Y, \mathbb{F})$
   (a) Trouver une base de V et calculer $\dim V$. Justifier votre réponse.
   Soit $f_{ij} : X \times Y \to \mathbb{F}$ *l'application définie par*

$$\begin{aligned} f_{ij}(x_k, y_l) &= \begin{cases} 1, & i = k, j = l \\ 0, & \textit{sinon.} \end{cases} \\ &= \delta_{ik}\delta_{jl}. \end{aligned}$$

   On montre que

$$\mathcal{B} = (f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}, f_{31}, f_{32})$$

   est une base de V. *Par conséquent* $\dim V = 6$.
   - *La liste est linéairement indépendante, car si* $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} f_{ij} = 0$, *alors*

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} f_{ij} \right) (x_k, y_l) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} \alpha_{ij} f_{ij}(x_k, y_l) = \alpha_{kl}$$

     pour $k = 1, 2, 3$ *et* $l = 1, 2$.

– *La liste est génératrice , car* $\forall f \in \mathcal{F}(X \times Y, \mathbb{F})$*, on peut écrire*

$$f = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j) f_{ij}.$$

En effet, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j) f_{ij} \right) (x_k, y_l) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j) \delta_{ik} \delta_{jl} = f(x_k, y_l)$$

pour $k = 1, 2, 3$ *et* $l = 1, 2$*. Les deux fonctions* f *et* $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j) f_{ij}$ *ont donc la même valeur sur chaque élément de* $X \times Y$ *et sont par sonséquent égales.*

(b) Soit $U = \{f \in V \mid f(x_1, y_2) = f(x_2, y_2) = f(x_3, y_2)\}$. Montrer que U est un sous-espace vectoriel de V. *On doit montrer*

– $U \neq \emptyset$ *:*
La fonction nulle $\bar{0} : X \times Y \to \mathbb{F}$, $(x_i, y_j) \mapsto 0$ *est un élément de* U*, car* $0 = \bar{0}(x_1, y_2) = \bar{0}(x_2, y_2) = \bar{0}(x_3, y_2)$.

– *Pour* $f, g \in U$*, on a* $f + g \in U$ *:*
Soient f *et* $g \in U$*. On a*

$$\begin{aligned}(f + g)(x_1, y_2) &= f(x_1, y_2) + g(x_1, y_2) = f(x_2, y_2) + g(x_2, y_2) \\ &= (f + g)(x_2, y_2) \\ &= f(x_3, y_2) + g(x_3, y_2) = (f + g)(x_3, y_2).\end{aligned}$$

Donc $f + g$ *est un élément de* U*.*

– *Pour* $f \in U$ *et* $\alpha \in \mathbb{F}$*, on a* $\alpha f \in U$ *:*
Soit $f \in U$ *et* $\alpha \in \mathbb{F}$*. Les égalités*

$$\begin{aligned}(\alpha f)(x_1, y_2) &= \alpha f(x_1, y_2) = \alpha f(x_2, y_2) \\ &= (\alpha f)(x_2, y_2) \\ &= \alpha f(x_3, y_2) = (\alpha f)(x_3, y_2)\end{aligned}$$

montrent que αf *est un élément de* U*.*

(c) Trouver un sous-espace W de V tel que $U \oplus W = V$. Justifier votre réponse. *On montre tout d'abord que*

$$\mathcal{B}' := (f_{11}, f_{21}, f_{31}, g := f_{12} + f_{22} + f_{32})$$

est une base de U*. Notons d'abord que* f_{11}, f_{21}, f_{31}*, et* g *sont des éléments de* U*, donc* $\operatorname{span}(\mathcal{B}') \subseteq U$*. Si* f *est un élément de* U*, on a* $f(x_1, y_2) = f(x_2, y_2) = f(x_3, y_2) =: \beta$*. On écrit comme avant*

$$f = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} f(x_i, y_j) f_{ij},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} f &= f(x_1,y_1)f_{11} + f(x_2,y_1)f_{21} + f(x_3,y_1)f_{31} + \beta f_{12} + \beta f_{22} + \beta f_{32} \\ &= f(x_1,y_1)f_{11} + f(x_2,y_1)f_{21} + f(x_3,y_1)f_{31} + \beta(f_{12} + f_{22} + f_{32}) \\ &= f(x_1,y_1)f_{11} + f(x_2,y_1)f_{21} + f(x_3,y_1)f_{31} + \beta g \in \operatorname{span}(\mathcal{B}'). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{B}'$ *est une liste génératrice de* U*.*
L'égalité $\alpha_{11}f_{11}+\alpha_{21}f_{21}+\alpha_{31}f_{31}+\beta(f_{12}+f_{22}+f_{32}) = 0$ *implique*

$$0 = \alpha_{11}f_{11} + \alpha_{21}f_{21} + \alpha_{31}f_{31} + \beta f_{12} + \beta f_{22} + \beta f_{32},$$

et donc immédiatement $\alpha_{11} = \alpha_{21} = \alpha_{31} = \beta = 0$ *car* $(f_{11}, f_{21}, f_{31}, f_{12}, f_{22}, f_{32})$ *est linéairement indépendante. La liste* $\mathcal{B}'$ *est donc linéairement indépendante.*
On complète $\mathcal{B}'$ *en une base de* V *:*

$$(f_{11}, f_{21}, f_{31}, g, f_{12}, f_{22}) \,.$$

L'indépendance linéaire est montrée de la même façon que précédemment : si

$$\alpha_{11}f_{11} + \alpha_{21}f_{21} + \alpha_{31}f_{31} + \beta g + \alpha_{12}f_{12} + \alpha_{22}f_{22} = 0,$$

alors

$$\alpha_{11}f_{11}+\alpha_{21}f_{21}+\alpha_{31}f_{31}+(\beta+\alpha_{12})f_{12}+(\beta+\alpha_{22})f_{22}+\beta f_{32} = 0,$$

et donc

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{31} = \beta + \alpha_{12} = \beta + \alpha_{22} = \beta = 0.$$

Cela implique $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{31} = \alpha_{12} = \alpha_{22} = \beta = 0$*.*
On a pour $f \in V$

$$\begin{aligned} f =& f(x_1,y_1)f_{11} + f(x_2,y_1)f_{21} + f(x_3,y_1)f_{31} + f(x_3,y_2)g \\ &+ (f(x_1,y_2) - f(x_3,y_2))f_{12} + (f(x_2,y_2) - f(x_3,y_2))f_{22}. \end{aligned}$$

Donc $V \subseteq \operatorname{span}(f_{11}, f_{21}, f_{31}, g, f_{12}, f_{13})$ *et on a égalité.*
Par conséquent, si on pose $W := \operatorname{span}(f_{12}, f_{13})$*, on obtient* $V = U \oplus W$*. (La somme est directe car d'après ce qui précède, on a* $\dim V = 6 = 4 + 2 = \dim U + \dim W$*.) Notons que*

$$W = \{f \in V \mid f(x_i,y_j) \neq 0 \Rightarrow i = 1 \text{ } et \text{ } j = 2 \text{ } ou \text{ } i = j = 2\} \,.$$

3. Indiquer la bonne réponse par une croix, et ensuite justifier votre réponse.

(a) Soient $q_1(x), q_2(x), ..., q_7(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) \smallsetminus \{0\}$. Si

$$\operatorname{span}\big(q_1(x), ..., q_7(x)\big) = \operatorname{span}\big(q_1(x)\big) \oplus \cdots \oplus \operatorname{span}\big(q_7(x)\big), (*)$$

est-il possible que $n = 5$?

La réponse est NON. Justification : On a $\dim \mathcal{P}_n(\mathbb{F}) = 6$ *si* $n = 5$*, donc aucune liste linéairement indépendante n'a plus de* 6 *éléments. Or,* $(*)$ *est équivalent à* $\big(q_1(x), ..., q_7(x)\big)$ *linéairement indṕendante.*

(b) Soient V et W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Soient S et T des applications linéaires de V vers W, et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Est-ce que l'application

$$\alpha \cdot S + \beta \cdot T : V \to W$$

est linéaire ? (Ici, la somme de deux applications et la multiplication d'une application par un scalaire sont définies comme d'habitude.)

La réponse est OUI. Justification : On calcule, pour $v, v' \in V$,

$$\begin{aligned}(\alpha S + \beta T)(v + v') &\overset{\substack{\text{déf. du}+\\ \text{d'applications}}}{=} (\alpha S)(v + v') + (\beta T)(v + v')\\ &\overset{\substack{\text{déf. de}\,\cdot\\ \text{d'appl.}}}{=} \alpha S(v + v') + \beta T(v + v')\\ &\overset{\substack{\text{additivité}\\ \text{de } S,T}}{=} \alpha(S(v) + S(v')) + \beta(T(v) + T(v'))\\ &= (\alpha S(v) + \beta T(v)) + (\alpha S(v') + \beta T(v'))\\ &= (\alpha S + \beta T)(v) + (\alpha S + \beta T)(v').\end{aligned}$$

Donc l'application $\alpha S + \beta T$ *est additive.*

Soient maintenant $v \in V$ *et* $r \in \mathbb{F}$*. On calcule*

$$\begin{aligned}(\alpha S + \beta T)(rv) &= \alpha S(rv) + \beta T(rv)\\ &= \alpha r S(v) + \beta r T(v) \qquad \textit{car } S, T \textit{ homogènes}\\ &= r(\alpha S(v) + \beta T(v))\\ &= r(\alpha S + \beta T)(v).\end{aligned}$$

On a donc montré que $\alpha S + \beta T$ *est homogène.*

(c) Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit U_n un sous-espace vectoriel de V. Supposer que

$$U_{n_1} + \cdots + U_{n_k} = U_{n_1} \oplus \cdots \oplus U_{n_k} \quad (**)$$

quelques soient $1 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ et quelque soit k. Est-il possible que $U_m \neq U_n$ chaque fois que $m \neq n$, i.e., que tous les U_n soient distincts ?

La réponse est NON. Justification : Si $m \neq n$ implique $U_m \neq U_n$, alors il existe au plus un $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n = \{0\}$. Par conséquent, $(**)$ implique que pour tout $d \in \mathbb{N}$, il existe un sous-espace U de V tel que $\dim U \geq d$. En effet, comme on peut choisir $U_{n_1}, \ldots, U_{n_d}$ tels que $U_{n_i} \neq \{0\}$ pour $i = 1, \ldots, d$, on a

$$\begin{aligned}\dim(U_{n_1} + \ldots + U_{n_d}) &= \dim(U_{n_1} \oplus \ldots \oplus U_{n_d}) \\ &= \sum_{i=1}^{d} \underbrace{\dim U_{n_i}}_{\geq 1} \geq d.\end{aligned}$$

Ainsi, on a $\dim V \geq d$ pour tout $d \in \mathbb{N}$, ce qui implique que $\dim V = \infty$.

4. Ci-dessous la notation $\mathbb{F}$ veut dire soit $\mathbb{R}$, soit $\mathbb{C}$.
   (a) Donner la définition complète d'un $\mathbb{F}$-espace vectoriel.
   Voir le cours !
   (b) Montrer que $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, muni de deux opérations

$$\mathrm{add} : V \times V \to V : (f, g) \mapsto g \circ f$$

et

$$\mathrm{mult} : \mathbb{R} \times V \to V : (\alpha, f) \mapsto \alpha \cdot f,$$

où $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot \big(f(x)\big)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Plusieurs axiomes ne sont pas satisfaits, par exemple :

– *L'opération* add *n'est pas commutative (axiome $V1$). En effet, on a pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + 2$:*

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 2 \text{ tandis que } (f \circ g)(x) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4,$$

donc $\mathrm{add}(g, f) \neq \mathrm{add}(f, g)$.

– *Les axiomes de distributivité (axiome $V6$) ne sont pas satisfaits :*

  i. On a, si f est définie comme ci-dessus :

$$(3 + 2)f(x) = 5x^2 \quad \text{et} \quad (2f) \circ (3f)(x) = 2(3x^2)^2 = 18x^2,$$

  donc l'égalité

$$\mathrm{mult}(\alpha + \beta, f) = \mathrm{add}(\mathrm{mult}(\alpha, f), \mathrm{mult}(\beta, f))$$

  n'est pas vraie pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $f \in V$.

ii. Si f et g sont définies comme plus haut, on a

$$3(f \circ g)(x) = 3(x^2 + 4x + 4)$$

mais

$$((3f) \circ (3g))(x) = 3(3(x+2))^2 = 27(x^2 + 4x + 4),$$

donc

$$\mathrm{mult}(\alpha, \mathrm{add}(g, f)) = \mathrm{add}(\mathrm{mult}(\alpha, g), \mathrm{mult}(\alpha, f))$$

n'est pas vraie pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in V$.

(c) Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{F}$ et $\vec{v} \in V$, alors

$$\alpha \cdot \vec{v} = \vec{0} \text{ si et seulement si } \alpha = 0 \text{ ou } \vec{v} = \vec{0}.$$

Justifier chaque pas de votre argument en faisant appel aux axiomes d'espace vectoriel.

$\Leftarrow$: On a $0v = (0+0)v \overset{\text{axiome } V6}{=} 0v + 0v$. Donc, puisque par $(V4)$ il existe $w \in V$ tel que $0v + w = 0$, on peut écrire

$$0 = 0v + w = (0v + 0v) + w \overset{V2}{=} 0v + (0v + w) = 0v + 0 \overset{V3}{=} 0v.$$

On a $\alpha 0 = \alpha(0+0) \overset{V6}{=} \alpha 0 + \alpha 0$. Soit $w \in V$ tel que $\alpha 0 + w = 0$ (existe par $(V4)$). Alors on peut écrire

$$0 = \alpha 0 + w = (\alpha 0 + \alpha 0) + w \overset{V2}{=} \alpha 0 + (\alpha 0 + w) = \alpha 0 + 0 \overset{V3}{=} \alpha 0.$$

$\Rightarrow$: Si $\alpha v = 0$ et $\alpha \neq 0$, alors il existe $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{F}$ et

$$0 = \frac{1}{\alpha} 0 = \frac{1}{\alpha}(\alpha v) \overset{V2}{=} (\frac{1}{\alpha}\alpha)v = 1v \overset{V5}{=} v,$$

où on a utilisé le deuxième point de la preuve de $\Leftarrow$ pour la première égalité.

(d) Montrer que si V est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel tel que $V \neq \{\vec{0}\}$, alors V contient un nombre infini de vecteurs distincts.

Si $V \neq \{0\}$, alors il existe $v \in V$ tel que $v \neq 0$. Soient α et $\beta \in \mathbb{F}$ tels que $\alpha \neq \beta$. Alors, comme $v \neq 0$ et $\alpha - \beta \neq 0$, on obtient $(\alpha - \beta)v \neq 0$ par l'exercice précédent.

Ainsi, $\alpha \neq \beta$ implique $\alpha v \neq \beta v$. Par conséquent, comme $\mathbb{F}$ possède un nombre infini d'éléments distincts, V possède également un nombre infini d'éléments distincts.

(e) Donner un exemple d'un $\mathbb{F}$-espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie. Justifier votre réponse.

L'espace vectoriel $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ *des polynômes n'est pas de dimension finie : Soit* $(p_1, \ldots, p_n)$ *une liste de polynômes, et soit*

$$d := \max_{i=1,\ldots,n}(\text{degré}\, p_i).$$

Alors

$$\text{degré}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i\right) \leq d \qquad \forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F},$$

ce qui équivaut à

$$\text{span}(p_1, \ldots, p_n) \subseteq \mathcal{P}_d(\mathbb{F}).$$

Donc $(p_1, \ldots, p_n)$ *ne peut pas être une liste génératrice de* $\mathcal{P}(\mathbb{F})$*.*